UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	IVO DA SILVA KNOPP
Frase	"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor". Paulo Freire

Nº Identificador: 19004

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19004

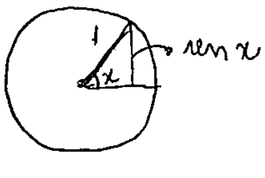
"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor".
Paulo Freire

Questão 3) Observe que $\lim_{x \to 0} \text{sen}(x) = 0$, pois a função sen(x) é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, $\lim_{x \to 0} \text{sen}(x) = \text{sen}\left(\lim_{x \to 0} x\right) = \text{sen}(0) = 0$

Note agora que $\lim_{x \to 0} x = 0$. Assim, como as funções $g(x) = \text{sen}(x)$ e $h(x) = x$ são contínuas e $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 0$, então podemos aplicar a regra de L'Hôpital: $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{h(x)} \overset{L.H.}{=} \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \lim_{x \to 0} \cos(x)$. A função $\cos(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, $\lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos\left(\lim_{x \to 0} x\right) = \cos(0) = 1$.

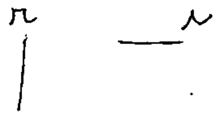
Logo, de fato, $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.

A interpretação geométrica desse fato é a seguinte: Em um círculo trigonométrico, tomando o raio como unidade, à medida que o ângulo central e, consequentemente, o arco determinado por ele diminuem, o cateto oposto ao ângulo (sen(x)) diminui "com a mesma velocidade".

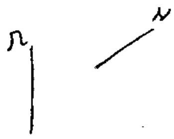


Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19004

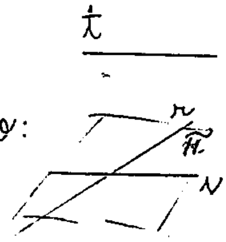
Questão 4) a) Falsa, pois r e s podem ser reversas e, portanto, não estarem simultaneamente contidas num único plano comum. Exemplo:



b) Falsa, pois, se r e s não são paralelas, então elas podem ser reversas e, portanto, não se intersectam. Exemplo:

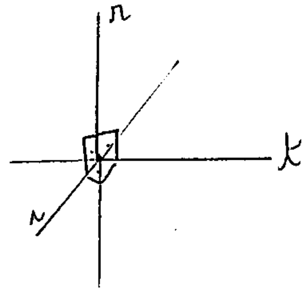


c) Falsa, pois r e t podem ser reversas como no seguinte exemplo:



d) Verdadeira.

e) Falsa, pois r, t e s podem ser concorrentes num único ponto, como no seguinte exemplo:



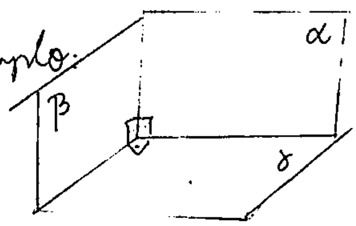
f) Verdadeira.

g) Verdadeira.

h) Verdadeira.

i) Verdadeira.

j) Falsa, pois há o seguinte contraexemplo:



α e β não são paralelos, mas, sim, perpendiculares.

Folha 02

Questão 5) Devemos encontrar um ponto A' tal que a distância de A' a PQ seja igual à distância de A a PQ. Equivalentemente, A' está na perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ que passa por A e a distância de A a A' é o dobro da distância de A a $\overleftrightarrow{PQ}$. Observe que $\overleftrightarrow{PQ}$ tem a seguinte equação paramétrica e, equivalentemente, equação cartesiana:

$$\overleftrightarrow{PQ}: \begin{cases} x = x_P + (x_Q - x_P)\,t \\ y = y_P + (y_Q - y_P)\,t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}$$

PARAMÉTRICA

$$\overleftrightarrow{PQ}: (y_Q - y_P)x - (x_Q - x_P)y - x_P y_Q + x_Q y_P = 0$$

CARTESIANA

A cartesiana foi obtida a partir da paramétrica. Observe que um vetor diretor para a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é $\vec{v} = (x_Q - x_P,\ y_Q - y_P)$. Assim, um vetor diretor da reta r perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ que passa por A é um vetor cujo produto interno com $\vec{v}$ é zero. Então, um vetor diretor para r é $\vec{n} = (y_P - y_Q,\ x_Q - x_P)$ e, portanto, a parametrização de r é: $r: \begin{cases} x = x_A + t(y_P - y_Q) \\ y = y_A + t(x_Q - x_P) \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}$

Como já deduzimos, $d_{A,\overleftrightarrow{PQ}} = \frac{1}{2} \cdot d_{A,A'}$. Usando a relação de distância de ponto à reta, a relação de distância entre dois pontos e o fato de que $A' \in r$, $A' = (x_{A'}, y_{A'})$, temos:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2} = \frac{|(y_Q - y_P)x_A - (x_Q - x_P)y_A - x_P y_Q + x_Q y_P|}{\sqrt{(y_Q - y_P)^2 + (x_Q - x_P)^2}}$$

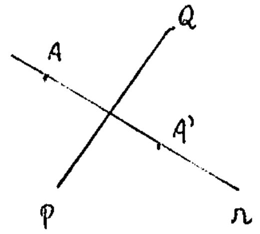
$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\cancel{x_A} - \cancel{x_A} - t_{A'}(y_P - y_Q))^2 + (\cancel{y_A} - \cancel{y_A} - t_{A'}(x_Q - x_P))^2} = \frac{|(y_Q - y_P)x_A - (x_Q - x_P)y_A - x_P y_Q + x_Q y_P|}{\sqrt{(y_Q - y_P)^2 + (x_Q - x_P)^2}}$$

Continuação da Questão 5) $\frac{1}{2}\sqrt{(t_{A'})^2\left[(y_P-y_Q)^2+(x_Q-x_P)^2\right]} = \frac{|(y_Q-y_P)x_A-(x_Q-x_P)y_A-x_Py_Q+x_Q...}{\sqrt{(y_Q-y_P)^2+(x_Q-x_P)^2}}$

$$|t_{A'}|\sqrt{(y_Q-y_P)^2+(x_Q-x_P)^2} = \frac{2|(y_Q-y_P)x_A-(x_Q-x_P)y_A-x_Py_Q+x_Qy_P|}{\sqrt{(y_Q-y_P)^2+(x_Q-x_P)^2}}$$

$$|t_{A'}| = \frac{2|(y_Q-y_P)x_A-(x_Q-x_P)y_A-x_Py_Q+x_Qy_P|}{(y_Q-y_P)^2+(x_Q-x_P)^2}$$

Note que podemos tomar $t_{A'} > 0$, caso A esteja dessa maneira:



Então, substituindo $t_{A'}$ nas equações paramétricas de r, temos:

$$A' = (x_{A'}, y_{A'}) = \left(x_A + \frac{(y_P-y_Q)\cdot 2|\overbrace{(y_Q-y_P)x_A-(x_Q-x_P)y_A-x_Py_Q+x_Qy_P}^{*}|}{(y_Q-y_P)^2+(x_Q-x_P)^2},\ y_A + \frac{(x_Q-x_P)\cdot 2|*|}{(y_Q-y_P)^2+(x_Q-x_P)^2}\right)$$

Questão 2) a) 1ª etapa: Deseja-se formar, com um grupo de n pessoas, uma comissão com K representantes. De quantas maneiras isso pode ser feito?

2ª etapa: A configuração do problema consiste em uma $\overbrace{\text{combinação}}^{\text{pois a ordem não importa}}$ simples de n elementos a uma taxa K. Logo, o número de maneiras para isso ser feito é $\binom{n}{K}$.

3ª etapa) Selecione uma pessoa qualquer de tal grupo, denotada por x_1. ~~Assim,~~ Com efeito há apenas duas possibilidades: ou x_1 está na comissão ou x_1 não está. Se x_1 está na comissão, sobram $n-1$ pessoas para ocuparem os $K-1$ cargos, já que um cargo já é de x_1, e o número de maneiras para isso ser feito é $\binom{n-1}{K-1}$. Se x_1 não está na comissão, sobram $n-1$ pessoas para ocuparem os K cargos, e o número de maneiras para isso ser feito é $\binom{n-1}{K}$. Logo, como esses casos/possibilidades particionam o conjunto total de maneiras, então a formação da comissão pode ser feita de $\binom{n-1}{K-1}+\binom{n-1}{K}$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19004

Continuação da Questão 2) a) maneiras. Portanto, pelo argumento combinatório, como contamos um mesmo ~~objeto~~ nº de possibilidades para se formar a comissão de duas formas distintas, temos que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \blacksquare$$

---

2) ~~b)~~ sem efeito! c) Selecione quatro pessoas quaisquer de tal grupo, denotadas por x_1, x_2, x_3 e x_4. Assim, há as seguintes possibilidades:

- As quatro estão na comissão: Nesse caso, sobram $n-4$ pessoas para $K-4$ cargos. Logo, $\binom{n-4}{k-4}$ representa o nº de possibilidades dessa opção.

- Apenas três estão na comissão: Nesse caso, sobram $n-4$ pessoas para $K-1$ cargos. Porém, a pessoa de fora pode ser x_1, x_2, x_3 ou x_4 (4 possibilidades). Logo, essa opção tem $4 \cdot \binom{n-4}{K-1}$ maneiras de acontecer.

- Apenas duas estão na comissão: Nesse caso, sobram $n-4$ pessoas para $K-2$ cargos. Porém, as duas pessoas de fora podem ser: $\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}$ ou $\{x_3, x_4\}$ (6 possibilidades). Logo, essa opção fornece $6 \cdot \binom{n-4}{K-2}$ maneiras.

- Apenas uma está na comissão: Nesse caso, sobram $n-4$ pessoas para $K-3$ cargos. Porém, a pessoa que está na comissão a priori pode ser x_1, x_2, x_3 ou x_4 (4 possibilidades). Logo, essa opção fornece $4 \cdot \binom{n-4}{K-1}$ maneiras.

- ~~Apenas~~ sem efeito Nenhuma delas está na comissão: Nesse caso, sobram $n-4$ pessoas para K cargos. Logo, essa opção fornece $\binom{n-4}{K}$ maneiras.

Como essas cinco possibilidades particionam o conjunto total de possibilidades, então a solução do problema é: $\binom{n-4}{K-4} + 4\binom{n-4}{K-3} + 6\binom{n-4}{K-2} + 4\binom{n-4}{K-1} + \binom{n-4}{K}$.

Questão 2) b) Observe que:

$$\binom{n-4}{k-4}+4\binom{n-4}{k-3}+6\binom{n-4}{k-2}+4\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k}=\frac{(n-4)!}{(n-k)!(k-4)!}+\frac{4(n-4)!}{(n-k-1)!(k-3)!}+\frac{6(n-4)!}{(n-k-2)!(k-2)!}+$$

$$\frac{4(n-4)!}{(n-k-3)!(k-1)!}+\frac{(n-4)!}{(n-k-4)!k!}=(n-4)!\left[\frac{(k-3)(k-2)(k-1)k+4(n-k)(k-2)(k-1)k+6(n-k)(n-k-1)(k-1)k+4(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\cdot k+(n-k)(n-k-1)(n-k-2)(n-k-3)}{k!(n-k)!}\right]$$

$$=(n-4)!\left[k^4-6k^3+11k^2-6k+\ \ldots\right.$$

↳ basta realizar a conta e separá-la em duas parcelas que serão $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$. Logo, pelo resultado do item a,

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n-4}{k-4}+4\binom{n-4}{k-3}+6\binom{n-4}{k-2}+4\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k}$$

Questão 1) Observe que, para $x>1500$, $\underbrace{2x\notin A}_{\text{já que } 2x>3000 \text{, nesse caso}}$. Como $B\subset A$ e satisfaz a regra de que se $x\in B$, $2x\notin B$, então o caso máximo para B é:

$B=\{1501, 1502, 1503, \ldots, 3000\}$, pois, neste caso, o dobro de cada elemento não está em A e, portanto, não é necessário "eliminá-lo" em B. Logo, a cardinalidade máxima que B pode assumir é 1500.