UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor: MATEMÁTICA

Candidato: DIEGO LEMOS TEIXEIRA

Frase: "Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire

Reescreva a frase: "Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire

Nº Identificador: 19007

Setor Curricular
Matemática

Nº 19007

"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire

Questão 1.

$B \subset A = \{x \in \mathbb{N}^* / x \leq 3.000\}$.

Se $x \in B \Rightarrow 2x \notin B$

Se $1 \in B$, então todo número ímpar pertence a B, já que esses não podem ser escritos da forma $2x$, ou seja, se $k \in \mathbb{N}^*$ é ímpar, então $k \neq 2x$ com $x \in \mathbb{N}^*$.

Assim temos que a cardinalidade de B assume valor mínimo igual a 1.500, já que existem 1.500 números ímpares entre 1 e 3000, contando o número 1, assim o dobro desses números não estão em B.

Como $1 \in B \Rightarrow 2 \notin B \Rightarrow 4 \in B$, vamos analisar uma P.g com $a_1 = 2$ e $q = 2$.

$$(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots, a_{11}) \quad , \quad a_{11} = 2.048$$

Temos que $a_1 \notin B$, $a_2 \in B$, $a_3 \notin B$, $a_4 \in B$, ou seja

$a_n \in B$ se n é par, ou seja

$a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10} \in B$.

??

Questão 2

1ª) Problema: Na turma de João estudam 10 alunos, incluindo João. A professora da turma deseja criar um único grupo de alunos com 7 pessoas, porém João, um menino indeciso não sabe se quer ou não participar do grupo.

De quantas maneiras a professora pode criar esse grupo sabendo que João pode ou não estar no grupo?

2ª) Resolução pelo membro $\binom{n}{k}$.

Como João pode ou não estar no grupo e essas possibilidades também se aplicam aos demais alunos, ou seja, qualquer aluno da turma pode ou não estar no grupo, vamos considerar o João como um aluno qualquer.

Assim a solução do problema é dada pela escolha de 7 alunos dentre 10 alunos, ou seja, $\binom{10}{7}$, como podemos ver a seguir.

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 10\cdot 3\cdot 4 = 120 \text{ maneiras}$$

distintas de criar o grupo com 7 alunos.

Setor Curricular: Matemática.

Nº 19007

Questão 2

3ª) Resolução pelo membro $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Como João pode ou não estar no grupo, podemos "separar" o problema em dois casos, sendo um caso com o João no grupo e o segundo caso com João não querendo estar no grupo, ou seja, João não é uma possibilidade de escolha para por no grupo. Temos as soluções a seguir.

1º caso: João no grupo.

Ao colocarmos o João no grupo restam 6 vagas à serem ocupadas por 6 alunos escolhidos entre os 9 alunos restante, assim temos que o total ~~de grupos é dado por~~ "sem efeito" de maneiras distintas de forma um grupo com João é dado por:

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84.$$

2º caso: João não quer participar.

Como João não quer participar do grupo, restam apenas 9 alunos, dos quais devemos escolher 7, ou seja, o total de maneiras distintas de formar um grupos sem o João é dada por:

$$\binom{9}{7} = \frac{9!}{7!\cdot 2!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 2\cdot 1} = \frac{9\cdot 8}{2} = 9\cdot 4 = 36.$$

Setor Curricular: Matemática

Nº 19007

Questão 2.

Assim o total de maneiras distintas de criar um grupo com 7 alunos, com ou sem o João, é dado pela união dos dois casos, ou seja.

$$\binom{9}{6} + \binom{9}{7} = 84 + 36 = 120.$$

Pela análise do problema acima temos que:

$$\binom{10}{7} = \binom{9}{6} + \binom{9}{7}.$$

b) Queremos demonstrar a identidade

$$\binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$$

Sabemos que: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, ou seja.

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1} = \binom{n-3}{k-3} + 2\binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1}$$

$$= \binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3} + 2\left[\binom{n-4}{k-3} + \binom{n-4}{k-2}\right] + \binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1} =$$

$$= \binom{n-4}{k-4} + 3\cdot\binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1}.$$

Aplicaremos o mesmo processo em $\binom{n-1}{k}$, obtendo.

Setor Curricular
Matemática

Nº 19007

Questão 2

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} = \binom{n-3}{k-2} + 2\cdot\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

$$= \binom{n-4}{k-3} + \binom{n-4}{k-2} + 2\left[\binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1}\right] + \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k} =$$

$$= \binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-2} + 3\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$$

Assim temos que: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ é dada por.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + \underbrace{3\binom{n-4}{k-3}} + 3\binom{n-4}{k-2} + \underbrace{\binom{n-4}{k-1}} + \underbrace{\binom{n-4}{k-3}} + 3\binom{n-4}{k-2} + \underbrace{3\binom{n-4}{k-1}} + \binom{n-4}{k}$$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + 4\cdot\binom{n-4}{k-3} + 6\cdot\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}}$$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular MATEMÁTICA	Nº 19007

Questão 3 $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$, esse limite possui um indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, visto que $sen(0)=0$, assim podemos aplicar a Regra de L'Hopital, obtendo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1}$$, onde $\cos(x)$ é a derivada da função $sen(x)$ e 1 é a derivada de x.

$$= \lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1.$$

Questão 4.

a) Falso, sendo r e s retas do espaço tridimensional a afirmação de que $r \cap s = \emptyset$ implica que ou r e s são paralelas ou r e s são reversas.

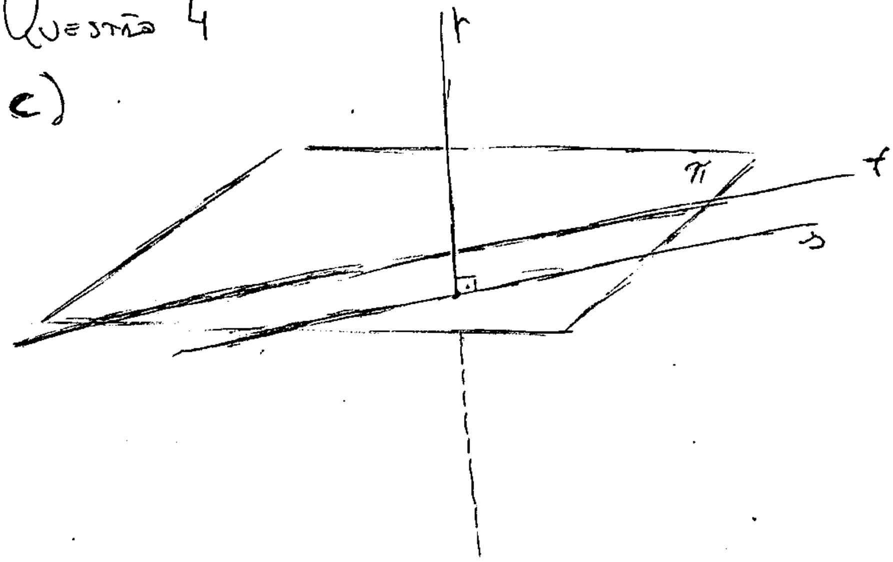
b) Falso, se r e s não são paralelas então elas podem ser concorrentes, caso r e s sejam coplanares ou (sem efeito) r e s são reversas, no caso de r e s serem não coplanares.

c) Falso. A reta r só corta a reta t, com $t // s$, no caso de r, s e t serem complanares. Se r não é coplanar a s e t (que são coplanares, visto que retas paralelas são coplanares) então r não corta t, como podemos ver na imagem a seguir.

Folha 6

Questão 4

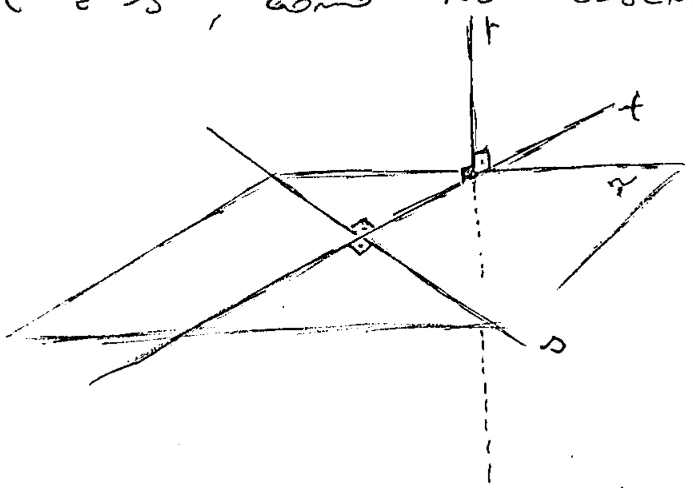
c)



. Caso em que r não é coplanar a t e s, logo $t \cap r = \emptyset$

d) Verdadeira.

e) Falso. Pegaremos o caso em que r não é coplanar a t e s, como no desenho a seguir.



Nesse caso temos:
. s ⊥ t e s e t coplanares
"sem efeito" . r ⊥ t e r e t coplanares
porém s e t são reversas.

f) Verdadeiro.

~~g) Verdadeiro~~ "sem efeito"

~~j) Falsa, Podemos ter o caso~~ "sem efeito"

h) Verdadeiro.

(Letras g e j na próxima página)

i) Verdadeiro.

Setor Curricular Matemática.

Nº 19007

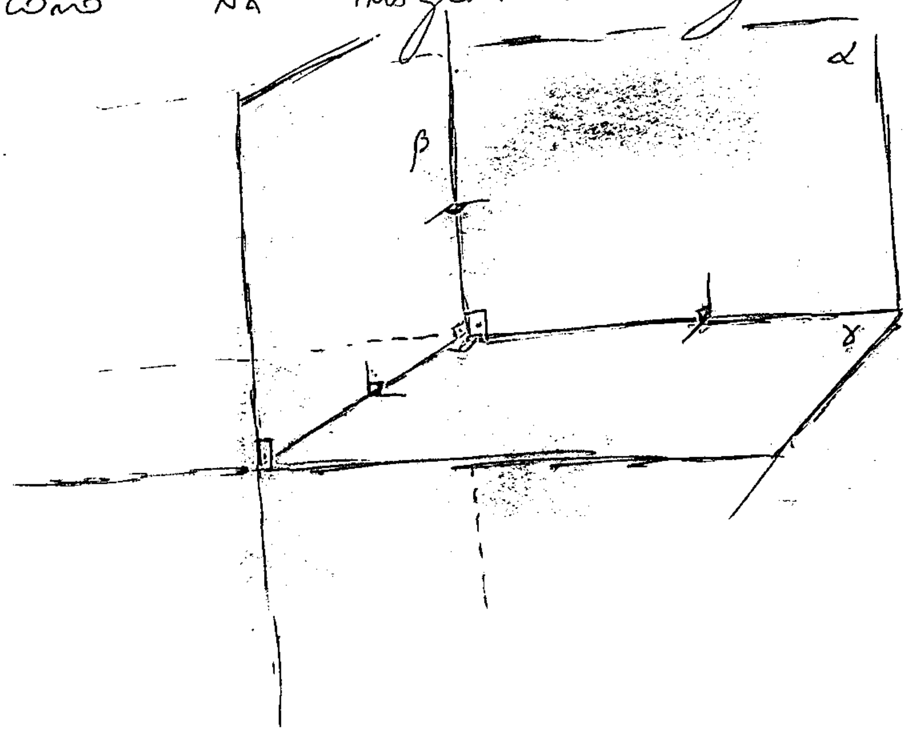
Questão 4

g) Verdadeira

j) Falsa. Podemos pegar o caso:

$\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$ e $\alpha \perp \beta$

como na imagem a seguir.



Questão 5

Vamos determinar a equação da reta PQ supondo $X_Q > X_P$

assim temos

$$PQ: \ y = ax + b \ , \ \text{com} \quad a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{X_Q - X_P}$$

$$\Rightarrow \ y = \left(\frac{y_Q - y_P}{X_Q - X_P}\right) \cdot x + b \ , \ \text{passa por} \ (X_P, y_P)$$

$$\Rightarrow \ y_P = \left(\frac{y_Q - y_P}{X_Q - X_P}\right) \cdot X_P + b \ \rightarrow \ b = \frac{y_P(X_Q - X_P) - (y_Q - y_P)X_P}{X_Q - X_P}$$

$$b = \frac{y_P X_Q - y_P X_P - y_Q X_P + y_P X_P}{X_Q - X_P} = \frac{y_P X_Q - y_Q X_P}{X_Q - X_P}$$

$$\Rightarrow \boxed{PQ: \ y = \left(\frac{y_Q - y_P}{X_Q - X_P}\right) x + \frac{y_P X_Q - y_Q X_P}{X_Q - X_P}}$$

ou $\boxed{(y_Q - y_P)x - (X_Q - X_P)y + y_P X_Q - y_Q X_P = 0}$

Seja $k = dist(A, PQ) = dist(A', PQ)$

com $k \in \mathbb{R}_+$ e $A = (X_A, Y_A)$ e $A' = (X_0, Y_0)$.

$$\Rightarrow \quad k = \frac{|(Y_Q - Y_P)\cdot X_i + (X_Q - X_P)Y_i + Y_P X_Q - Y_Q X_P|}{\sqrt{(Y_Q - Y_P)^2 + (X_Q - X_P)^2}}$$

onde $(X_i, Y_i) = (X_A, Y_A)$ ou $(X_i, Y_i) = (X_0, Y_0)$

$\Rightarrow$ ~~$|(Y_Q - Y_P)\cdot X_A - (X_Q - X_P)Y_A + Y_P X_Q - Y_Q X_P|$~~ "Sem efeito"

$$\Rightarrow \frac{|(Y_Q - Y_P)\cdot X_A - (X_Q - X_P)Y_A + Y_P X_Q - Y_Q X_P|}{\sqrt{(Y_Q - Y_P)^2 + (X_Q - X_P)^2}} = \frac{|(Y_Q - Y_P)\cdot X_0 - (X_Q - X_P)\cdot Y_0 + Y_P X_Q - Y_Q X_P|}{\sqrt{(Y_Q - Y_P)^2 + (X_Q - X_P)^2}}.$$

$$\Rightarrow |(Y_Q - Y_P)\cdot X_A - (X_Q - X_P)Y_A + Y_P X_Q - Y_Q X_P| = |(Y_Q - Y_P)\cdot X_0 - (X_Q - X_P)\cdot Y_0 + Y_P X_Q - Y_Q X_P|$$

??

Questão 5

Determinar a equação da r, sendo $r \perp PQ$ e $A \in r$.

$\Rightarrow$ $r: y = mx + n$, com $a \cdot m = -1$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right) \cdot m = -1 \Rightarrow \boxed{m = \frac{(x_P - x_Q)}{y_Q - y_P}}$$

$$r: y = \frac{(x_P - x_Q)}{y_Q - y_P} \cdot x + b$$, passa por $A = (x_A, y_A)$.

$$y_A = \frac{(x_P - x_Q)}{y_Q - y_P} \cdot x_A + b \rightarrow \boxed{b = \frac{y_A(y_Q - y_P) - (x_P - x_Q) \cdot x_A}{y_Q - y_P}}$$

$$\boxed{r: y = \frac{(x_P - x_Q) \cdot x + y_A(y_Q - y_P) - (x_P - x_Q) \cdot x_A}{y_Q - y_P}}$$

??