UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	LARA MARTINS BARBOSA
Frase	"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor." Paulo Freire

Nº Identificador 19037

"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor." Paulo Freire.

1) $A = \{x \in \mathbb{N}^* / x \leq 3000\} = \{1, 2, 3, \dots, 3000\}$.

$n(A) = 3000$.

$\cdot\ x \in B \Rightarrow 2x \notin B$.

"Se $1 \in B$ então $2 \notin B$"
"Se $3 \in B$ então $6 \notin B$".

$\vdots$

1º Tirar todos os números pares. (1500 números pares)? (Não!)

~~2º Tirar todos os múltiplos de 3 que são pares.~~

* A partir do momento que tiramos todos os números pares não temos nenhum valor em que ele e seu dobro estão nesse conjunto. Mas precisamos em algumas questões...

* Se o número $1 \in B \Rightarrow 2 \notin B$, logo, 4 pode pertencer a B.

Se $4 \in B \Rightarrow 8 \notin B$. Logo, 16 pode pertencer a B.

Se $16 \in B \Rightarrow 32 \notin B$. Logo, 64 pode pertencer a B.

Esquema:

$1 \in B \Rightarrow 2 \notin B$
~~2~~ → 4
4 → ~~8~~
~~8~~ → 16
16 → ~~32~~
~~32~~ → 64
64 → ~~128~~
~~128~~ → 256
256 → ~~512~~
~~512~~ → 1024
1024 → ~~2048~~
11

$1 \notin B \Rightarrow 2 \in B$
2 → ~~4~~
~~4~~ → 8
8 → ~~16~~
~~16~~ → 32
32 → ~~64~~
~~64~~ → 128
128 → ~~256~~
~~256~~ → 512
512 → ~~1024~~
~~1024~~ → 2048
11

$3 \in B \Rightarrow 6 \notin B$
~~6~~ → 12
12 → ~~24~~
~~24~~ → 48
48 → ~~96~~
~~96~~ → 192
192 → ~~384~~
~~384~~ → 768
768 → ~~1536~~
9

$5 \in B \Rightarrow 10 \notin B$
~~10~~ → 20
20 → ~~40~~
~~40~~ → 80
80 → ~~160~~
~~160~~ → 320
320 → ~~640~~
~~640~~ → 1280
1280 → ~~2560~~
9

$7 \in B \Rightarrow 14 \notin B$
~~14~~ → 28
28 → ~~56~~
~~56~~ → 112
112 → ~~224~~
~~224~~ → 448
448 → ~~896~~
~~896~~ → 1792
8

$17 \in B \Rightarrow 34 \notin B$
~~34~~ → 68
68 → ~~136~~
~~136~~ → 272
272 → ~~544~~
~~544~~ → 1088
1088 → ~~2176~~
7

$9 \in B \Rightarrow 18 \notin B$
~~18~~ → 36
36 → ~~72~~
~~72~~ → 144
144 → ~~288~~
~~288~~ → 576
576 → ~~1152~~
~~1152~~ → 2304 lo

$11 \in B \Rightarrow 22 \notin B$
~~22~~ → 44
44 → ~~88~~
~~88~~ → 176
176 → ~~352~~
~~352~~ → 704
704 → ~~1408~~
~~1408~~ → ~~2816~~

$13 \in B \Rightarrow 26 \notin B$.
~~26~~ → 52
52 → ~~104~~
~~104~~ → 208
208 → ~~416~~
~~416~~ → 832
832 → ~~1664~~
7

$15 \in B \Rightarrow 30 \notin B$
~~30~~ → 60
60 → ~~120~~
~~120~~ → 240
240 → ~~480~~
~~480~~ → 960
960 → ~~1920~~
7

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular: Matemática

Nº 19037

$19 \in B \Rightarrow 38 \notin B$
$\cancel{38} \to 76$
$76 \to \cancel{152}$
$\cancel{152} \to 304$
$304 \to \cancel{608}$
$\cancel{608} \to 1216$
$\underbrace{1216 \to \cancel{2432}}_{7}$

$21 \in B \Rightarrow 42 \notin B$
$\cancel{42} \to 84$
$84 \to \cancel{168}$
$\cancel{168} \to 336$
$336 \to \cancel{672}$
$\cancel{672} \to 1344$
$\underbrace{1344 \to \cancel{2688}}_{7}$

23 − 7
25 − 7
27 − 7
29 − 7
31 − 7
33 − 7
35 − 7
37 − 7

. Padrão se $1 \in B$.
. Números ímpares.
. Multiplos da forma: 2^n
. Metade dos múltiplos dessa forma.

Resposta:

O valor máximo que a cardinalidade de B pode assumir é dado pela metade da quantidade de números múltiplos dos ímpares escritos como 2^n, e mais todos os ímpares até 3000.

. Se $1 \in B$: $I + \dfrac{M(i)}{2}$

. Se $1 \notin B \Rightarrow 2 \in B$ a quantida de elementos será a mesma.

I: quantidade de ímpares de 3000 (1500).

M(i): quantidade de múltiplos de cada número ímpar (i) que pode ser escrito da forma $i \cdot 2^n$.

$\cdot\ n = 1 + (n-1)$
$\cdot\ K = 1 + (K-1)$
$n! = n(n-1)!$
$K! = K(K-1)!$

2) a) $\binom{n}{K} = \binom{n-1}{K-1} + \binom{n-1}{K}$

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-K)!K!}$

$\binom{n-1}{K-1} = \dfrac{(n-1)!}{(n-1-(K-1))!(K-1)!}$

$\binom{n-1}{K} = \dfrac{(n-1)!}{(n-1-K)!K!}$

$* \dfrac{n!}{(n-K)!K!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-K)!K!}$

$** \dfrac{(n-1)!}{(n\cancel{-1}-K\cancel{+1})!(K-1)!} + \dfrac{(n-1)!}{(n-1-K)!K!} = \dfrac{(n-1)!}{(n-K)!(K-1)!} + \dfrac{(n-1)!}{(n-1-K)!K!}$

$= \dfrac{(n-1)!(n-1-K)!K! + (n-1)!(n-K)!(K-1)!}{(n-K)!(K-1)!(n-1-K)!K!}$

$* = **$

$$* \ \frac{n(n-1)!}{(n-K)!\,K!}$$

$$** \ \frac{(n-1)!(n-1-K)!\,K! + (n-1)!(n-K)!(K-1)!}{(n-K)!(K-1)!(n-1-K)!\,K!} = \frac{(n-1)!\left[(n-1-K)!\,K! + (n-K)!(K-1)!\right]}{(n-K)!(K-1)!(n-1-K)!\,K!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\left[(n-1-K)!\,K.(K-1)! + (n-K)!(K-1)!\right]}{(n-K)!(K-1)!(n-1-K)!\,K!} = \frac{(n-1)!\cancel{(K-1)!}\left[(n-1-K)!\,K + (n-K)!\right]}{(n-K)!\cancel{(K-1)!}(n-1-K)!\,K!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\left[(n-1-K)!\,K + (n-K)(n-K-1)!\right]}{(n-K)!(n-1-K)!\,K!} = \frac{(n-1)!\cancel{(n-1-K)!}.\left[K + (n-K)\right]}{(n-K)!\cancel{(n-1-K)!}\,K!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\left[\cancel{K} + n - \cancel{K}\right]}{(n-K)!\,K!} = \frac{(n-1)!\,n}{(n-K)!\,K!} = \frac{n(n-1)!}{(n-K)!\,K!}$$

Logo, $\frac{n(n-1)!}{(n-K)!\,K!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-(K-1))!(K-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-K)!\,K!} = \frac{n(n-1)!}{(n-K)!\,K!} = \frac{n!}{(n-K)!\,K!}$

b) $\binom{n}{K} = \binom{n-4}{K-4} + 4\binom{n-4}{K-3} + 6\binom{n-4}{K-2} + 4\binom{n-4}{K-1} + \binom{n-4}{K}$

$$\frac{n!}{(n-K)!\,K!} = \frac{(n-4)!}{(n-\cancel{4}-(K-\cancel{4}))!(K-4)!} + 4\left(\frac{(n-4)!}{(n-4-(K-3))!(K-3)!}\right) + 6\left(\frac{(n-4)!}{(n-4-(K-2))!(K-2)!}\right) + 4\left(\frac{(n-4)!}{(n-4-(K-1))!(K-1)!}\right) + \left(\frac{(n-4)!}{(n-4-K)!\,K!}\right)$$

$$= \cancel{\frac{(n-4)(n-3)!}{(n-K)!(K-4)!}} = \frac{(n-4)!}{(n-K)!(K-4)!} + \frac{4(n-4)!}{(n-1-K)!(K-3)!} + \frac{6(n-4)!}{(n-2-K)!(K-2)!} + \frac{4(n-4)!}{(n-3-K)!(K-1)!} + \frac{(n-4)!}{(n-4-K)!\,K!}$$

(*) continua na folha 6.

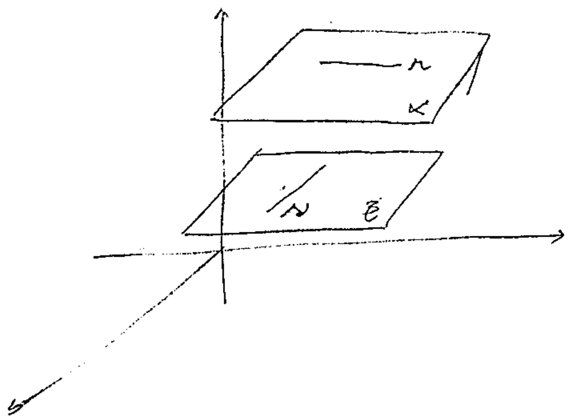
c) $\binom{n}{K} \Rightarrow 4\binom{n-4}{K-3} = 4\left[\binom{n-4-1}{K-3-1} + \binom{n-4-1}{K-3}\right] = 4\left[\binom{n-5}{K-4} + \binom{n-5}{K-3}\right]$

$$\therefore \binom{n-4}{K-3} = \frac{1}{4}\left[\binom{n-5}{K-4} + \binom{n-5}{K-3}\right].$$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.

$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; |f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x-a| < \delta$. Assim, $|\operatorname{sen} x - L| < \varepsilon$; $0 < |x| < \delta$.

4) a) ~~Verdadeira~~ Falso.
~~b)~~ As retas podem estar em ~~p~~ planos diferentes α e β em que α e β são paralelos, mas as retas r e s não.
Segue ilustração:

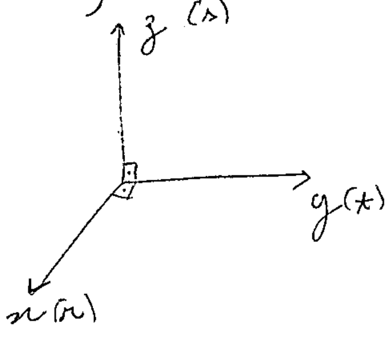


b) Falso. As retas podem estar em planos diferentes, não serem paralelas e não se intersectarem. A mesma ilustração do item a) pode ser usada como exemplo.

c) Verdadeira

d) Verdadeira.

e) Falsa. Um exemplo que pode ser dado ~~uma~~ para contradizer a afirmação é a ilustração dos eixos coordenados x, y, z



Suponha as retas r, s e t estejam sobre os eixos. Elas são perpendiculares entre si, mas nenhuma é paralela a outra.

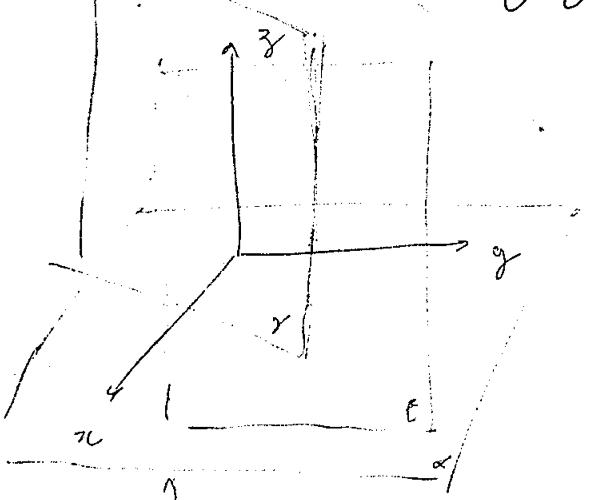
f) Verdadeira

g) Verdadeira.

h) Verdadeira.

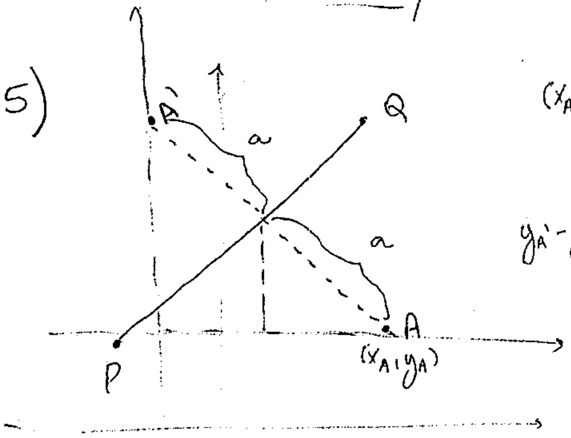
i) Verdadeira.

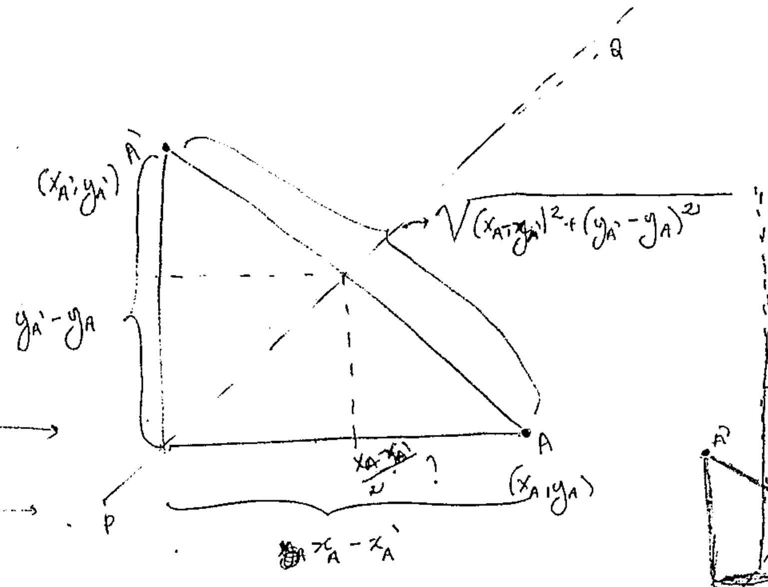
j) Falsa. Uma contradição que pode ser dada nesse caso é se considerarmos os planos α, β, γ como planos que passam nos eixos coordenados x, y, z.

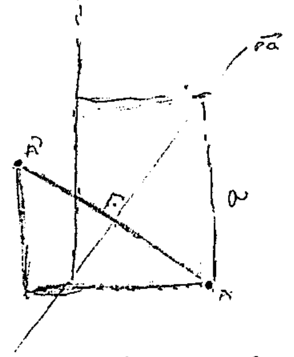


Os planos são perpendiculares entre si, mas nenhum é paralelo ao outro.

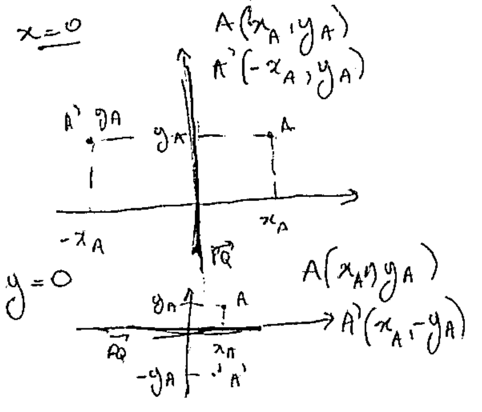
5)







Testes:



reta $\overrightarrow{PQ}$: $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - y_P = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}(x - x_P) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}(x - x_P) + y_P$

O coeficiente angular da reta AA' é $-\left(\frac{x_Q - x_P}{y_Q - y_P}\right)$.

Setor Curricular Matemática

Nº 19037

(*) continuação 2b.

$$= \frac{\text{numerador...}}{(n-K)!\,(K-4)!\,(n-1-K)!\,(K-3)!\,(n-2-K)!\,(K-2)!\,(n-3-K)!\,(K-1)!\,(n-4-K)!\,K!} =$$

$= \cdot \ldots$

$$(n-4)! = \frac{n!}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$(K-4)! = \frac{K!}{K(K-1)(K-2)(K-3)}$$

$$\begin{array}{ccccccccccl} & & & & 1 & & & & & & (a+b)^0 \\ & & & 1 & & 1 & & & & & (a+b)^1 \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & & & (a+b)^2 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & (a+b)^3 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array}$$