UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	JONATHAN CARDOSO REIS
Frase	"Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire

Nº Identificador: 19044

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular MATEMÁTICA	Nº 19044

"Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão."

Paulo Freire

Questão 1

$B \subset A$ e $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 3000\}$.

Todo número ímpar fará parte do conjunto B pois nenhum pode ser escrito na forma $2K$, $K \in \mathbb{Z}$. Um total de 1500

ANALISANDO E GENERALIZANDO:

sem efeito

1 3 5 7 9 ~~10~~ 11 13 15 17 ... 1497 1499 ; 1501 1503

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

2 6 10 14 18 22 26 30 34 ... 2994 2998

4 8 12 16 20 24 28 32 ... 2996

Na 2ª ~~coluna~~ linha há todos os pares que não poderão pertencer ao conjunto B. Um total de 750.

$2998 = 2 + (n-1) \cdot 4$

$n - 1 = 749$

$n = 750$

Portanto a cardinalidade máxima de B é $1500 + 750 + 487 = 2737$

Na 3ª Linha há os possíveis candidatos do conjunto B. Desses valores apenas os que na sua decomposição apresentam 2^n, n par, farão parte de B. No Total de

$2996 = 4 + (n-1) \cdot 4$

$2992 = (n-1) \cdot 4$

$n = 749$

$749 \mid 20$ → 37, resto 9

$37 \times 13 = 481$

$481 + 6 = 487$

Folha 01

Questão 4) r, s, t retas distintas no $\mathbb{R}^3$.
α, β, γ planos distintos

a) Falso. As retas podem ser reversas, isto é, estarem em planos diferentes que não se intersectam.

b) Falso. Retas reversas também não se intersectam e não são paralelas.

c) Falso, pois a ~~x~~ reta t pode estar em outro plano paralelo ao plano das retas s e r sendo paralela a s mas não intersectando r.

d) Verdadeiro.

e) Falso, pois a reta s pode ser perpendicular à t estando em um plano ortogonal ao plano ~~fo~~ que contém r e t sendo assim perpendicular às duas.

f) Verdadeiro.

g) Verdadeiro.

h) Verdadeiro.

i) Verdadeiro.

j) Verdadeiro. Paralelos distintos ou coincidentes

Questão 2

a) Enunciado: Em uma turma do CAP-UFRJ do total dos n alunos do 3º ano, apenas um é do sexo masculino. Pensando em formar uma comissão ~~para representar~~ com K alunos para representar esta turma na solenidade que ocorrerá no próximo mês, determine qual o total de comissões que podem ser feitas.

1ª SOLUÇÃO: Basta escolher K alunos dentre os n pertencentes a esta turma. Como a escolha independe de ordem, o total de maneiras de fazer isso é dado por $C_n^k = \binom{n}{k}$.

2ª Solução: Podemos pensar em dividir o total de comissões em dois tipos: comissões que contenham o menino e comissões que não contenham o menino. Pensando assim, temos:

1º TIPO: comissões com o menino.

Como garante-se que ele já está na comissão basta escolher dos ~~n~~ n-1 alunos, K-1 para completar a comissão, o que pode ser feito de $C_{n-1}^{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ maneiras.

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular: MATEMÁTICA

Nº 19044

2º TIPO: Comissões sem o menino

Já admitindo-se que ele não estará na comissão, então deve-se escolher K alunos dentre os n-1 possíveis (excetua-se o menino), o que pode ser feito de $C_{n-1}^{k} = \binom{n-1}{k}$ maneiras.

Como os dois tipos de conjuntos ~~se~~ são disjuntos e pelo princípio da adição, pode-se concluir que o total de comissões que podem ser formadas é dado por $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Portanto, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

b) $\underbrace{\binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3}}_{\binom{n-3}{k-3}} + \binom{n-4}{k-3} + \binom{n-4}{k-3} + \binom{n-4}{k-3} + \binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-2} + \underbrace{3\cdot\binom{n-4}{k-2} + 3\cdot\binom{n-4}{k-1}}_{3\binom{n-3}{k-1}} + \underbrace{\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}}_{\binom{n-3}{k}}$

$3\cdot\binom{n-3}{k-2}$

$\binom{n-3}{k-3} + 3\cdot\binom{n-3}{k-2} + 3\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}$

$\underbrace{\binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2}}_{\binom{n-2}{k-2}} + \underbrace{2\cdot\binom{n-3}{k-2} + 2\binom{n-3}{k-1}}_{2\cdot\binom{n-2}{k-1}} + \underbrace{\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}}_{\binom{n-2}{k}}$

$\binom{n-2}{k-2} + 2\cdot\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$

Folha 04

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular MATEMÁTICA	Nº 19044

$$\underbrace{\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-2}{k-1}}+\underbrace{\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}}$$
$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$$

$\boxtimes$

c) Imagine que o menino tenha 3 amigas inseperáveis, A, B e C
~~Podemos~~ Pode-se dividir o mesmo problema em 5 tipos agora.
1º TIPO: comissões contendo os 4 amigos $\Rightarrow$ basta escolher $k-4$ pessoas das $n-4$ restantes. Total de $C_{n-4}^{k-4}=\binom{n-4}{k-4}$ comissões.

2º TIPO: comissões contendo 3 dos 4 amigos $\Rightarrow$ há $C_4^3=4$ maneiras de escolher os 3 amigos que farão parte da comissão. Para cada uma dessas maneiras há $C_{n-4}^{k-3}=\binom{n-4}{k-3}$ modos de completar a comissão.
Pelo princípio multiplicativo, $4.\binom{n-4}{k-3}$ comissões

3º TIPO: comissões contendo 2 dos 4 amigos $\Rightarrow$ há $C_4^2=6$ maneiras para escolher os 2 amigos que farão parte ~~po~~ da comissão. Para cada escolha dos amigos há $C_{n-4}^{k-2}=\binom{n-4}{k-2}$ modos para completar a comissão ($k-2$ pois dos k lugares dois já estão ocupados e $n-4$ porque 2 amigos já estão no grupo e os outros 2 não podem ser escolhidos). Pelo princípio multiplicativo, $6.\binom{n-4}{k-2}$ comissões.

4º tipo: comissões contendo apenas 1 dos 4 amigos: há 4 maneiras de escolher quem fará parte da comissão e para cada uma destas há $C_{n-4}^{k-1}=\binom{n-4}{k-1}$ maneiras de completar a comissão. Pelo princípio multiplicativo, há $4.\cancel{\binom{n-4}{k-1}}$ $4.\binom{n-4}{k-1}$ comissões.
5º Tipo: comissões contendo nenhum dos amigos: basta escolher k alunos dos $n-4$ restantes. $C_{n-4}^{k}=\binom{n-4}{k}$ comissões.

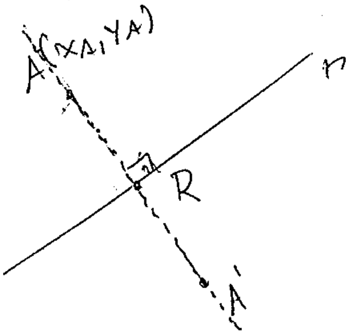
Folha 05

Esgotando-se todas as possibilidades de comissões e não havendo intersecções entre os casos analisados, pelo princípio aditivo há, ao todo, $\binom{n-4}{k-4} + 4\cdot\binom{n-4}{k-3} + 6\cdot\binom{n-4}{k-2} + 4\cdot\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$ comissões.

5) Seja m_r o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{PQ}$, chamada de r. Como $P \in r$, tem-se:

$m_r = \dfrac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$ $\therefore$ $r: y = m_r x + n$

$y_p = m_r x_p + n \Rightarrow n = y_p - m_r x_p$ $\therefore$ $r: y = m_r x + (y_p - m_r x_p)$



Seja s a reta ~~por~~ perpendicular a r que passa por A.

$m_s = \dfrac{-1}{m_r} \Rightarrow m_s = \dfrac{x_p - x_q}{y_q - y_p}$

$s: y = m_s \cdot x + k$. Como $A \in s$, tem-se:

$y_A = m_s x_A + k \Rightarrow k = y_A - m_s x_A$ $\therefore$ $s: y = m_s x + (y_A - m_s x_A)$

Seja R o PONTO DE INTERSECÇÃO ENTRE r e s. Dessa forma:

$m_r x + y_p - m_r x_p = m_s x + y_A - m_s x_A$

$x(m_r - m_s) = y_A - y_p + m_r x_p - m_s x_A$

$x = \dfrac{y_A - y_A + m_r x_p - m_s x_A}{m_r - m_s}$

$x = \dfrac{\dfrac{y_A(x_q - x_p)\cdot(y_q - y_p) - y_B(x_q - x_p)\cdot(y_q - y_p) + (x_q x_A - x_p x_A)\cdot(x_q - x_p) + (x_p y_q - x_p y_p)\cdot(y_q - y}{(x_q - x_p)\cdot(y_q - y_p)}}{\dfrac{(y_q - y_p)^2 + (x_q - x_p)^2}{(x_q - x_p)\cdot(y_q - y_p)}}$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular MATEMÁTICA	Nº 19044

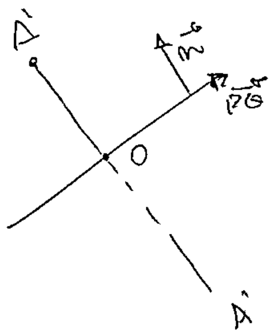
Questão 6 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x - 0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 1 \right| < \varepsilon$.

Questão 5 Por vetor

$\overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P)$ $\vec{n} \perp \overrightarrow{PQ}$

$\vec{n} = (y_Q - y_P, x_P - x_Q)$. $\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \left(\frac{y_Q - y_P}{\sqrt{(y_Q - y_P)^2 + (x_P - x_Q)^2}}, \frac{x_P - x_Q}{\sqrt{(y_Q - y_P)^2 + (x_P - x_Q)^2}} \right)$



$\overrightarrow{OA'} = K \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$, $K \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$ (simétricos)

Folha 07