UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor: MATEMÁTICA

Candidato: ERICK CARGNEL BORGES BARRETO

Frase: "Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." Paulo Freire

Reescreva a frase: "Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." Paulo Freire.

Nº Identificador: 19081

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular MATEMÁTICA	Nº 19081

"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." Paulo Freire

SEM EFEITO

~~QUESTÃO 1~~)

SEM EFEITO

5) Defina o vetor $\vec{u}$ como o vetor (~~unitário~~) com direção e sentido de $\overrightarrow{PQ}$, isto é, $\vec{u} = (x_q - x_p, y_q - y_p)$, e $\vec{v} = (-y_q + y_p, x_q - x_p)$. Temos que $\vec{u} \perp \vec{v}$, logo estes vetores definem uma base ortogonal para o plano $\mathbb{R}^2$. Logo, existe escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(x_A, y_A) = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = \alpha(x_q - x_p, y_q - y_p) + \beta \cdot (-y_q + y_p, x_q - x_p)$$

Isto é, (I) $x_A = \alpha \cdot x_q - \alpha \cdot x_p - \beta \cdot y_q + \beta \cdot y_p$ e (II) $y_A = \alpha \cdot y_q - \alpha \cdot y_p + \beta \cdot x_q - \beta \cdot x_p$.

Observe que nesta base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, o ponto simétrico A' de A por $\overleftrightarrow{PQ}$ será dado por $A' = \alpha \cdot \vec{u} - \beta \cdot \vec{v}$. Sendo assim, basta definir os escalares α, β em função das coordenadas de P e Q e A:

De (I) temos que $\alpha = \dfrac{X_A - \beta(y_{\cancel{q}} - y_p)}{(X_q - X_p)}$, substituindo em (II):

$$y_A = \frac{X_A - \beta(y_q - y_p)}{(x_q - x_p)} \cdot (y_p - y_q) + \beta \cdot (x_q - x_p) = \frac{X_A \cdot (y_p - y_q) - \beta(y_q - y_p)(y_p - y_q)}{(X_q - X_p)} + \beta(x_q - x_p)$$

$$\Rightarrow y_A \cdot (x_q - x_p) = X_A \cdot (y_p - y_q) + \beta(y_q - y_p)^2 + \beta(x_q - x_p)^2$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{y_A(x_q - x_p) - X_A \cdot (y_p - y_q)}{(y_q - y_p)^2 + (x_q - x_p)^2}$$

Logo $$\alpha = \frac{X_A - \dfrac{y_A(x_q - x_p) - X_A(y_p - y_q)}{(y_q - y_p)^2 + (x_q - x_p)^2} \cdot (y_q - y_p)}{(X_q - X_p)}$$

Então:

$$A' = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} = \left(\alpha \cdot (x_q - x_p) - \beta \cdot (-y_q + y_p) \ , \ \alpha (y_q - y_p) - \beta (x_q - x_p)\right)$$

$$x_{A'} = \left[X_A - \frac{Y_A (x_q - x_p) - X_A (Y_p - Y_q)}{(Y_q - Y_p)^2 + (x_q - x_p)^2} \cdot (Y_q - Y_p) - \frac{Y_A \cdot (x_q - x_p) - X_A \cdot (Y_p - Y_q)}{(Y_q - Y_p)^2 + (X_q - X_p)^2} \cdot (-Y_q + Y_p) \right]$$

$$Y_{A'} = \left[\frac{X_A - \frac{Y_A (x_q - x_p) - X_A (Y_p - Y_q)}{(Y_q - Y_p)^2 + (x_q - x_p)^2} \cdot (Y_p - Y_q)}{(x_q - x_p)} \right] \cdot (Y_q - Y_p) - \left[\frac{Y_A \cdot (x_q - x_p) - X_A (Y_p - Y_q)}{(Y_q - Y_p)^2 + (X_q - X_p)^2} \cdot (x_q - x_p) \right].$$

---

4)

a) Falso. Basta tomar r e s como sendo retas reversas.

b) Falso. Basta tomar r e s como sendo retas reversas.

~~c) Falso. Tome s e t em um plano π e~~) SEM EFEITO

c) Falso. Tome s e t em um plano π e r perpendicular ao plano π, intersectando o plano em um ponto $P \in s$. r corta s, mas não corta t.

d) Verdadeiro (considerando o caso $r = s$ como paralelismo de retas)

e) Falso. Considere o caso no espaço $\mathbb{R}^3$: $r = (\lambda, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}$, $t = (0, \beta, 0), \beta \in \mathbb{R}$ e $s = (0, 1, \gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Temos que $r \perp t$ e $t \perp s$, mas r e s são retas reversas.

f) Verdadeiro.

g) Verdadeiro

h) Verdadeiro (considerando o caso $\cancel{\alpha = \beta}$ SEM EFEITO $\alpha = \beta$ como planos paralelos)

i) Verdadeiro

j) Verdadeiro (considerando o caso $\alpha = \beta$ como planos paralelos)

3) Quando $x \to 0$, temos que $sen(x) \to 0$, logo $\left(\cancel{\frac{sen(x)}{x}}\right)$ SEM EFEITO podemos aplicar a regra de L'Hopital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{[sen(x)]'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{cos(x)}{1} = 1.$$

1) O maior conjunto possível para B é formado pelos números ímpares de A, acrescido dos números pares que não são múltiplos de um número ímpar vezes uma potência da forma 2^{2i+1}. Isto é, estarão incluídos os números pares da forma $2^{2i}\cdot(2k+1)$, $k, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, onde $2^{2i}(2k+1) \leq 3.000$. Sendo assim temos os casos:

1º) números ímpares menores que 3.000 : 1.500

2º) $\underline{i=1}$: $2^2\cdot(2k+1) \leq 3.000 \Rightarrow 8k+4 \leq 3.000 \Rightarrow k \leq \frac{2996}{8} \Rightarrow k = 374$

3º) $\underline{i=2}$: $2^4(2k+1) \leq 3.000 \Rightarrow 32k+16 \leq 3.000 \Rightarrow k \leq \frac{2984}{32} \Rightarrow k = 93$

4º) $\underline{i=3}$: $2^6(2k+1) \leq 3.000 \Rightarrow 128k+64 \leq 3.000 \Rightarrow k \leq \frac{2936}{32} \Rightarrow k = 22$

5º) $\underline{i=4}$: $2^8(2k+1) \leq 3.000 \Rightarrow 512k+256 \leq 3.000 \Rightarrow 512\cdot k \leq 2744 \Rightarrow k = 5$

6º) $\underline{i=5}$: $2^{10}\cdot(2k+1) \leq 3.000 \Rightarrow 2048k+1024 \leq 3000 \Rightarrow k=0$

Logo, a cardinalidade máxima de B é dada por:

$$1.500 + 374 + 93 + 22 + 5 = 1.994$$

A cardinalidade máxima de B é 1994. (~~sic~~)

2) b) Basta aplicar a propriedade do item (a) em recorrência:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$= \left[\binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1}\right] + \left[\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}\right] = \binom{n-2}{k-2} + 2\cdot\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$

$$= \left[\binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2}\right] + 2\left[\binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1}\right] + \left[\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}\right]$$

$$= \binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-3}{k-2} + 3\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

$$= \left[\binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3}\right] + 3\left[\binom{n-4}{k-3} + \binom{n-4}{k-2}\right] + 3\left[\binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1}\right] + \left[\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}\right]$$

$$= \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}. \blacksquare$$

a) Desejo contar de quantos modos pode-se combinar, em um restaurante, n tipos de salada com k tipos de carne, sabendo que cada prato contém apenas 1 tipo de cada.

1ª solução: Combinação simples $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

2ª solução: Sabe-se que no Triângulo de Pascal, o elemento da n-ésima linha e da k-ésima coluna é a soma dos elementos da (n-1)-ésima linha e (k-1)-ésima coluna com o da (n-1)-ésima linha e k-ésima coluna. Logo:

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k-1)!\cdot(n-k)} + \frac{(n-1)!}{k\cdot(k-1)!\cdot(n-k-1)!} = \frac{k\cdot(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k\cdot(k-1)!\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot(n-k+k)}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}. \blacksquare$$

c) Vamos utilizar a propriedade do Triângulo de Pascal para 4 linhas:

$$\binom{n-4}{k-4} \quad \binom{n-4}{k-3} \quad \binom{n-4}{k-2} \quad \binom{n-4}{k-1} \quad \binom{n-4}{k}$$

$$\binom{n-3}{k-3} \quad \binom{n-3}{k-2} \quad \binom{n-3}{k-1} \quad \binom{n-3}{k}$$

$$\binom{n-2}{k-2} \quad \binom{n-2}{k-1} \quad \binom{n-2}{k}$$

$$\binom{n-1}{k-1} \quad \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{k}$$

Além dessa propriedade, usaremos a propriedade de que no Triângulo de Pascal, na 4ª linha, os escalares são $C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4$, nesta ordem. Logo:

$$C_4^0 \cdot \binom{n-4}{k-4} + C_4^1 \cdot \binom{n-4}{k-3} + C_4^2 \cdot \binom{n-4}{k-2} + C_4^3 \cdot \binom{n-4}{k-1} + C_4^4 \binom{n-4}{k} =$$

$$= 1\binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + 1\binom{n-4}{k}$$

Resultado no 2º membro da identidade do item (b).