UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	RAMIRO MARINS
Frase	"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida cada ato cotidiano". Paulo Freire

Nº Identificador 19082

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19082.

Questão 1

A princípio podemos incluir os elementos $\{1501, 1502, \dots 3000\}$ em B pois nenhum deles terá seu dobro (sem efeito) ~~visto~~ em A visto que o menor dobro é $3002 \notin A$ $(2 \cdot 1501 = 3002)$. Com isso não poderemos incluir os elementos $\{1500, 1499, \dots, 751\}$ pois todos possuem seus dobros já incluídos. Seguindo esta mesma linha de raciocínio poderemos incluir em B os seguintes elementos: $\{376, 377, \dots, 750\} \cup \{94, 95, \dots, 187\} \cup \{24, 25, \dots, 46\} \cup \{6, 7, \dots, 11\} \cup \{2\}$ e, pelo mesmo motivo acima, deixaremos de fora os elementos $\{188, 189, \dots, 375\} \cup \{47, 48, \dots, 93\} \cup \{12, 13, \dots, 23\} \cup \{3, 4, 5\} \cup \{1\}$. Sendo assim, o conjunto B com maior cardinalidade, atendendo aos critérios estabelecidos (sem efeito) ~~será~~ será:

$B = \{2, 6, 7, \dots, 11, 24, 25, \dots, 46, 94, 95, \dots, 187, 376, 377, \dots, 750, 1501, 1502, \dots, 3000\}$ e sua cardinalidade será: $1 + 6 + 23 + 94 + 375 + 1500 = \boxed{1999 \text{ elementos.}}$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ **Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.**	Setor Curricular Matemática	Nº 19082.

Questão 2

a) Etapa 1: Em uma urna contendo n bolas numeradas de 1 até n, de quantas maneiras distintas poderemos retirar k bolas? $(k \leq n)$

Etapa 2 (solução com o 1º membro)

O que queremos são agrupamentos de k bolas entre as n bolas existentes. Notemos que os grupos de bolas $\{n_1, n_2, \dots, n_k\} = \{n_2, n_1, n_7, n_k, \dots\}$, ou seja, grupos com as mesmas bolas mas em ordem distintas não diferem. Dessa forma o problema pode ser solucionado com a combinação de n bolas tomadas de k em k, ou seja, $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Etapa 3 (solução com o 2º membro)

Podemos pensar em realizar a combinação de $(n-1)$ bolas tomadas de $(k-1)$ vezes, faltando então 1 bola para completar as k bolas, mas temos n bolas, assim basta multiplicar por n, sendo que cada grupo aparecerá k vezes, então devemos dividir por k, vejamos a solução:

$$C_{n-1}^{k-1} \cdot n \cdot \frac{1}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} = \left(\frac{n-k}{k} + \frac{k}{k}\right) \cdot \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} + \frac{n-k}{k}\binom{n-1}{k-1} =$$

$$= \binom{n-1}{k-1} + \frac{n-k}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!} = \binom{n-1}{k-1} + \frac{(n-k)\cdot(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} + \frac{\cancel{(n-k)}\cdot(n-1)!}{k!\,\cancel{(n-k)}\cdot(n-k-1)!} =$$

$$= \binom{n-1}{k-1} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} = \cancel{\binom{n-1}{k-1} + (n-1)!} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

sem efeito

Questão 2

b) Iremos aplicar a relação do item (a) diversas/sucessivas vezes, assim:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2} + 2\binom{n-3}{k-2} + 2\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} = \binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-3}{k-2} + 3\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-2} + 3\binom{n-4}{k-2} + 3\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k} \blacksquare$$

c) Basta utilizarmos o mesmo pensamento utilizado na etapa 3 do item (a), mas agora realizar a combinação com (n-4) bolas tomadas em k, k-1, k-2, k-3 e k-4 vezes. Notemos que deveremos multiplicar cada resultado, respectivamente, por C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3 e C_4^4. Vejamos

$$\underbrace{C_4^0}_{1} \cdot C_{n-4}^{k} + \underbrace{C_4^1}_{4} \cdot C_{n-4}^{k-1} + \underbrace{C_4^2}_{6} \cdot C_{n-4}^{k-2} + \underbrace{C_4^3}_{4} \cdot C_{n-4}^{k-3} + \underbrace{C_4^4}_{1} \cdot C_{n-4}^{k-4} =$$

$$= \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{n-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k} = \binom{n}{k} \blacksquare$$

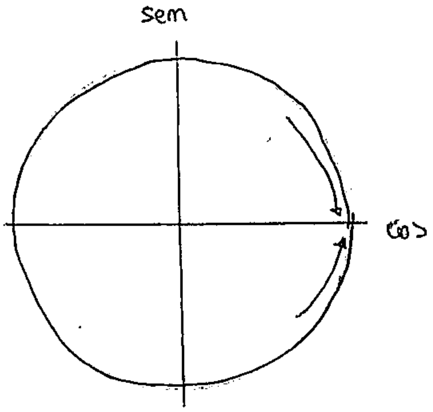
Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular: Matemática

Nº 19082

Questão 3

A demonstração pode ser obtida através da técnica do confronto (teorema do confronto)



Notemos que: $\frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\text{sen}(x)}{\text{sen}(x)} = \frac{\text{sen}^2(x)}{x \cdot \text{sen}(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{x \cdot \text{sen}(x)} = \frac{1}{x \cdot \text{sen}(x)} - \frac{\cos^2(x)}{x \cdot \text{sen}(x)}$.

sem efeito

Temos ainda que: $\frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\text{sen}^2(x)}{\text{sen}^2(x)} = \frac{\text{sen}^3(x)}{x(1-\cos^2 x)} = \frac{\text{sen}^3(x)}{x - x\cos^2 x}$

sem efeito

Assim $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x \cdot \text{sen}(x)} - \frac{\cos^2(x)}{x \cdot \text{sen}(x)} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^3(x)}{x - x \cdot \cos^2 x} = 1$ ■

Setor Curricular Matemática

Nº 19082

Questão 4

a) Falso.

Basta pensarmos em $r \in \alpha$ e $s \in \beta$, tal que $\alpha \perp \beta$, com isso todas as retas pertencentes à α são perpendiculares às retas pertencentes à β, mas nem todas se cortam. Tomemos então r e s uma dessas retas que não se cortam, elas não serão paralelas pois são perpendiculares.

b) Falso.

Basta pensarmos no exemplo dado no item a)

c) Falso.

Basta pensarmos em r e $s \in \alpha$ e $t \in \beta$, tal que $\alpha // \beta$, assim, sendo $s // t$, mesmo que r corte s, r não cortará t pois estão em planos distintos.

d) Verdadeiro

e) Verdadeiro

f) Verdadeiro

g) Verdadeiro

h) Verdadeiro (Enunciado confuso, creio que houve erro)

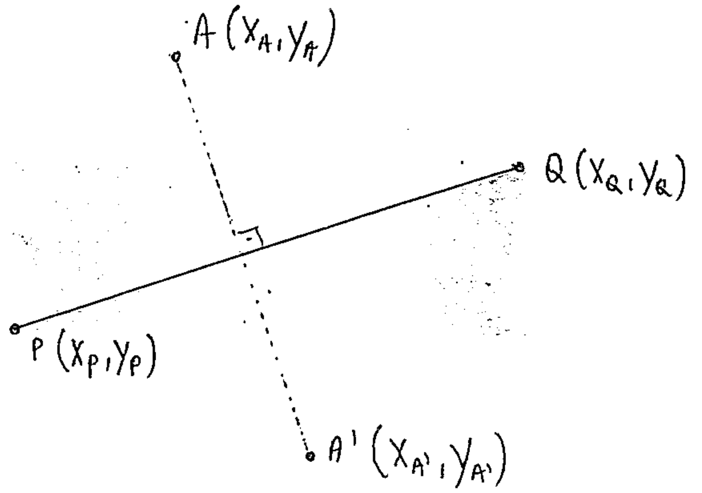
i) Verdadeiro

j) Falso.

Por hipótese α é perpendicular a r e β, logo não são paralelos.

Questão 5

Esboço da questão geometricamente



distância de ponto à reta

$$d(P,r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Equação da reta PQ $(ax + by + c = 0)$

$$ax_p + by_p + c = ax_Q + by_Q + c \Rightarrow a(x_p - x_Q) + b(y_p - y_Q) = 0$$

Como A' é simétrico à A em relação a reta PQ, temos que a distância de A' até a reta PQ é igual à distância de A até PQ, ou seja:

$$\frac{|ax_A + by_A|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_{A'} + by_{A'}|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow ax_{A'} + by_{A'} = \pm(ax_A + by_A)$$

1º caso

$$ax_{A'} + by_{A'} = ax_A + by_A$$

$$x_{A'} = \frac{ax_A + by_A - by_{A'}}{a}$$

$$y_{A'} = \frac{ax_A + by_A - ax_{A'}}{b}$$

2º caso

$$ax_{A'} + by_{A'} = -ax_A - by_A$$

$$x_{A'} = \frac{-ax_A - by_A - by_{A'}}{a}$$

$$y_{A'} = \frac{ax_A - by_A - ax_{A'}}{b}$$