UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor: MATEMÁTICA

Candidato: VANESSA HENRIQUES BORGES

Frase: "Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." Paulo Freire

Reescreva a frase: "Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." - Paulo Freire.

Nº Identificador: 19084

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19084

"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda" - Paulo Freire

2) a) Numa turma de 20 alunos desejamos combinar 16 alunos num ônibus para levá-los a um passeio cultural em Teresópolis. É possível pensar na solução desse problema levando ~~de 19 alunos~~ num ônibus o total de 15 escolhidos no grupo de 19 alunos e em outro ônibus levarmos 16 alunos escolhidos do total de 19 alunos?

Ou seja, queremos resolver um problema:

$$C_{20,16} = \binom{20}{16} = \frac{\cancel{20}^{5} \cdot 19 \cdot \cancel{18}^{6,3} \cdot 17 \cdot \cancel{16!}}{\cancel{16!} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 4845$$ maneiras de fazermos essa escolha.

Vamos resolver o problema pensando de maneira análoga. Ou seja:

$$\binom{20}{16} \overset{?}{=} \binom{19}{15} + \binom{19}{16} ?$$

$$\binom{19}{15} = \frac{19!}{15!\,3!} = \frac{19 \cdot \cancel{18}^{6} \cdot 17 \cdot \cancel{16}^{\cancel{8}\,2} \cdot \cancel{15!}}{\cancel{15!}\,\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{4}} = \cancel{133}\ 323 \cdot 6 \cdot \cancel{8}^{2} = \cancel{15504}\ 3876$$

$$\binom{19}{16} = \frac{19 \cdot \cancel{18}^{\cancel{6}\,3} \cdot 17 \cdot \cancel{16!}}{\cancel{16!}\,\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 323 \cdot 3 = 969$$

Assim: $3876 + 969 = 4845 = \binom{20}{16}$

Portanto, podemos resolver a escolha dos 16 alunos que irão ao passeio dessa maneira também. Isso prova que $\binom{20}{16} = \binom{19}{15} + \binom{19}{16} = 4845$

b) $(\Rightarrow)$ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} =$

$= \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2} + 2\binom{n-3}{k-2} + 2\binom{n-3}{k-1} +$

$+ \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} =$

$= \binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-3}{k-2} + 3\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} =$

2) b) $\binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-2} + 3\binom{n-4}{k-1} + 3\binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$

$= \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$

$(\Leftarrow)$

$\binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-2}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k} =$

$= \binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-2} + 3\binom{n-4}{k-1} + 3\binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$

$= \binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-3}{k-2} + 3\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} =$

$= \binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2} + 2\binom{n-3}{k-2} + 2\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} =$

$= \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} =$

$= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

c) No item a resolvemos $C_{20,16}$. Se utilizarmos o segundo membro da identidade ao item b, teremos:

$\binom{20}{16} = \binom{16}{12} + 4\binom{16}{13} + 6\binom{16}{14} + 4\binom{16}{15} + \binom{16}{16}$

$\binom{16}{12} = \frac{16.15.14.13.\cancel{12!}}{\cancel{12!}\,4.3.2.1} = 1820$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19084

2) c) $4\binom{16}{13} = 4\cdot\frac{16.15.14.\cancel{13!}}{\cancel{13!}\,3.2.1} = 2240$

$6\binom{16}{14} = 6\cdot\frac{16.15.\cancel{14!}}{\cancel{14!}\,2.1} = 720$

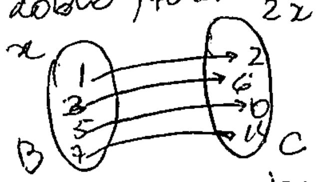
$4\binom{16}{15} = 4\cdot\frac{16.15!}{15!\,1} = 64$

$\binom{16}{16} = \frac{16!}{16!\,0!} = 1$

Assim: $\binom{16}{12}+4\binom{16}{13}+6\binom{16}{14}+4\binom{16}{15}+\binom{16}{16} = 1820+2240+720+64+1 = 4845 = \binom{20}{16}$.

1) $A=\{x\in\mathbb{N} / x\le 3000\} \Rightarrow A=\{1,2,3,4,\ldots,3000\} \Rightarrow \#(A)=3000$

$B\subset A$ e $B=\{x\in B \Rightarrow 2x\notin B\} \Rightarrow \#(B)<\#(A)$. ~~Temos dois casos:~~ ~~1º caso: Se o primeiro número elemento for 0~~ : $B=\{1,3,4,5,7,9,11,13,15,16,17,19,20,21,23,25,27,28,29,31,33,35,36,37,39,41,43,44,45,47,48,49,51,52,\ldots,\cancel{3000}\ 2999\}$. Se pensarmos no conjunto A, ele possuem 1500 elementos pares e 1500 elementos ímpares. Se tomarmos todos os elementos ímpares e relacionarmos cada um deles com seu dobro, teremos o seguinte:



Se analisarmos bem, o conjunto que é formado pelo dobro dos elementos ímpares do conjunto B formam uma progressão aritmética de razão 4: $C=\{2,6,10,14,18,22,26,\ldots,2998\}$

$a_n = 2998 = 2+(n-1).4 \Rightarrow 2998 = 2+4n-4 \Rightarrow 2998 = 4n-2 \Rightarrow$

$4n = 2998+2 \Rightarrow 4n = 3000 \Rightarrow n = \frac{3000}{4} = 750.$

Folha 3

ou seja, há 750 pares múltiplos de 4 que não podem

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular: Matemática

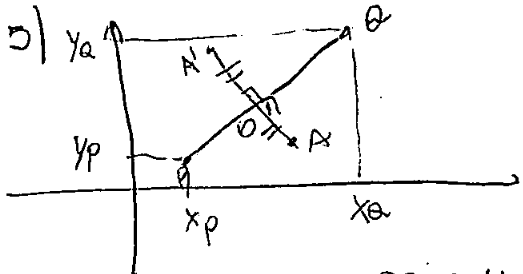
Nº 19084

1) estar no conjunto B. Assim, dos elementos pares sobrariam $D = \{4, 8, 12, 16, 24, \cancel{@}\,20, 32, 40, \ldots, 3000\}$. Os múltiplos de 8 devem ser retirados, $b_n = 3000 = 8 + (n-1) \cdot 8 \Rightarrow 3000 = 8 + 8n - 8 \Rightarrow 8n = 3000$

$n = \frac{3000}{8} = 375$ devem ser retirados do conjunto B.

Essa técnica nos mostra que há mais elementos pares a ser retirados. Pensemos o seguinte, cada elemento par do conjunto A de 1 até 1500 possui o seu dobro no conjunto A. Assim se pensarmos em $E \subset A$ tal que $E = \{1, 2, 3, \ldots, 1500\}$ e $F \subset A$ tal que $F = \{ \cancel{x}\, y / y = 2x$ para $x \in E\}$ temos que $\#(F) = 750$. ~~Fe~~ O $F \not\subset B$. Todos os elementos do conjunto A a partir de 1501 até 3000 não possuem seu dobro no conjunto A. Mas todos os números pares de 1501 até 3000 são o dobro de algum elemento de A ~~nos~~ nos números de 750 até 1500. Logo sobram $\frac{750}{2} = 375$ elementos.

O conjunto ~~BCO~~ B é formado por todos os elementos ímpares e os pares que não são dobro de nenhum elemento. Logo $\#(B) = \#(\text{Ímpares}) +$
$\#(\text{Pares que não são dobro de algum de } A) = 1500 + 1 = 1501$

5) 

Reta suporte de $PQ \Rightarrow y = \left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right) \cancel{x} + b \Rightarrow y = \frac{\Delta y_{PQ}}{\Delta x_{PQ}} \cancel{x} + b \rightarrow$ reta s

Reta suporte de $AA' \Rightarrow y = \left(\frac{d - y_a}{c - x_a}\right) x + b' \Rightarrow y = \frac{\Delta y_{AA'}}{\Delta x_{AA'}} x + b' \rightarrow$ reta t

As retas s e t são perpendiculares então:

$$\frac{\Delta y_{PQ}}{\Delta x_{PQ}} \cdot \frac{\Delta y_{AA'}}{\Delta x_{AA'}} = -1 \Rightarrow \frac{\Delta y_{PQ}}{\Delta x_{PQ}} = \frac{-\Delta x_{AA'}}{\Delta y_{AA'}} \Rightarrow \frac{(y_Q - y_P)}{(x_Q - x_P)} = \frac{-(d - y_a)}{(c - x_a)}$$

Folha 4

A distância de A à reta s:

$$d(s, A) = \frac{\left| \frac{\Delta y_{PQ}}{\Delta x_{PQ}} \cdot x_A + b y_A - c \right|}{\sqrt{\left(\frac{\Delta y_{PQ}}{\ldots}\right)^2 + b^2}}$$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19084

5) A distância de A' à reta s:

$$d(s, A') = \frac{\left| \frac{\Delta y_{PQ}}{\Delta x_{PQ}} \cdot c + bd - c \right|}{\sqrt{\left(\frac{\Delta y_{PQ}}{\Delta x_{PQ}}\right)^2 + b^2}}$$

$d(s, A') = d(S, A)$ e $d(AA') = 2\, d(A, S) = 2\, d(s, A')$

Como r ⊥ s $\Rightarrow a \cdot a' + b \cdot b' = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y_{PQ}}{\Delta x_{PQ}} \cdot \frac{\Delta y_{AA'}}{\Delta x_{AA'}} + bb' = 0 \Rightarrow -1 + bb' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b' = \frac{1}{b}$. Assim: reta s: $y = \frac{\Delta y_{PQ}}{\Delta x_{PQ}} x + b$ e

reta t: $y = -\frac{\Delta x_{PQ}}{\Delta y_{PQ}} x + \frac{1}{b}$

A intersecção entre as retas r e s:

$$\frac{\Delta y_{PQ}}{\Delta x_{PQ}} x + b = -\frac{\Delta x_{PQ}}{\Delta y_{PQ}} x + \frac{1}{b}$$

$$\frac{\Delta y_{PQ}}{\Delta x_{PQ}} x + \frac{\Delta x_{PQ}}{\Delta y_{PQ}} x = \frac{1}{b} - \frac{b}{1/b}$$

$$x \left(\frac{\Delta y_{PQ}^2 + \Delta x_{PQ}^2}{\Delta x_{PQ} \cdot \Delta y_{PQ}} \right) = \frac{1 - b^2}{b}$$

$$x = \frac{(1-b^2)(\Delta x_{PQ} \cdot \Delta y_{PQ})}{b(\Delta y_{PQ}^2 + \Delta x_{PQ}^2)}$$ é o valor de x na intersecção.

$$y = -\frac{\Delta x_{PQ}}{\cancel{\Delta y_{PQ}}} \left(\frac{(1-b^2)(\Delta x_{PQ} \cancel{\Delta y_{PQ}})}{b(\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ})} \right) + \frac{1}{b}$$

$$y = \frac{-(1-b^2)(\Delta x^2_{PQ}) + (\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ})}{b(\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ})}$$

$$y = \frac{-\cancel{\Delta x^2_{PQ}} + b^2 \Delta x^2_{PQ} + \Delta y^2_{PQ} + \cancel{\Delta x^2_{PQ}}}{b(\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ})} = \frac{b^2 \Delta x^2_{PQ} + \Delta y^2_{PQ}}{b\, \overline{PQ}^2}$$

Folha 5

$$y = \frac{b^2\, \Delta x^2_{PQ} + \Delta y^2_{PQ}}{b\, \overline{PQ}^2}$$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19084

5) $O = \left(\dfrac{(1-b^2)\,\Delta x_{PQ} \cdot \Delta y_{PQ}}{b(\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ})}, \; b^2 \dfrac{\Delta x^2_{PQ} + \Delta y^2_{PQ}}{b\,\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ}} \right) \in \varepsilon_p$

$d(A', O) = d(A, O)$ $\quad A' = (c, d) \quad A = (x_a, y_a)$

$\sqrt{\left(\dfrac{b^2\Delta x^2_{PQ} + \Delta y^2_{PQ}}{b\,\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ}} - d\right)^2 + \left(\dfrac{(1-b^2)(\Delta x_{PQ}\Delta y_{PQ})}{b(\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ}} - c\right)^2} =$

$= \sqrt{\left(\dfrac{b^2\Delta x^2_{PQ} + \Delta y^2_{PQ}}{b\,\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ}} - y_a\right)^2 + \left(\dfrac{(1-b^2)(\Delta x_{PQ}\Delta y_{PQ}}{b(\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ}} - x_a\right)^2}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{b^2\Delta x^2_{PQ} + \Delta y^2_{PQ}}{b\,\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ}} - d\right)^2 - \left(\dfrac{b^2\Delta x^2_{PQ} + \Delta y^2_{PQ}}{b\,\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ}} - y_a\right)^2 = \left(\dfrac{(1-b^2)(\Delta x_{PQ}\Delta y_{PQ}}{b(\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ}}\right.$

$- \left(\dfrac{(1-b^2)(\Delta x_{PQ}\Delta y_{PQ})}{b(\Delta y^2_{PQ} + \Delta x^2_{PQ}} - c\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ((b^2\Delta x^2_{PQ} + \Delta y^2_{PQ})(1-d))^2 - ((b^2\Delta x^2_{PQ} + \Delta y^2_{PQ})(1-y_a))^2 =$
$((1-b^2)(\Delta x_{PQ}\Delta y_{PQ})(1-c))^2 \Rightarrow$

$= -((1-b^2)(\Delta x_{PQ}\Delta y_{PQ})(1-x_a))^2 + ((1-b^2)(\Delta x_{PQ}\Delta y_{PQ})(1-c))^2$

$\Rightarrow (b^2\Delta x^2_{PQ} + \Delta y^2_{PQ})^2((1-d)^2 - (1-y_a)^2) = (1-b^2)(\Delta x_{PQ}\Delta y_{PQ})^2((1-c)^2 - (1-x_a)^2$

3) Sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \Rightarrow \dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-1}{x} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \Rightarrow 0$ é assíntota vertical.

Suponhamos por absurdo que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \neq 1$.

Ao calcularmos $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ observamos que este

Folha 6

limite se trata de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

3) Quando isso acontece podemos aplicar a regra de L'Hospital.

Assim: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$. Logo chegamos num absurdo e como o limite, por definição, quando existe é único, então $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ como queríamos demonstrar.

4) a) Falso. As retas r e s podem ser reversas. Elas não se cortam, mas não são paralelas

b) Falso. As retas r e s podem ser reversas. Elas não são paralelas e não se interceptam

c) Verdadeiro

d) Verdadeiro

e) Falso, pois temos o teorema das 3 perpendiculares que nos garante que se ~~[illegible]~~ $r \perp t$ e $s \perp t$ então $r \perp s$.

f) verdadeiro

g) verdadeiro

h) verdadeiro

i) verdadeiro

j) Falso. Pelo teorema das 3 perpendiculares, $\alpha \perp \gamma$ e $\beta \perp \gamma$ então $\alpha \perp \beta$.