UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	BRUNO XAVIER DE SOUZA FLORES
Frase	"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." Paulo Freire

Nº Identificador 19085

"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda". Paulo Freire

1) $A = \{x \in N^* \mid x \leq 3000\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 2999, 3000\}$

$\{B \subset A \mid x \in B \Rightarrow 2x \notin B\}$ → Em palavras, temos que os números pares não pertencem ao conjunto B.

O maior subconjunto possível é o próprio conjunto. Para obter a máxima cardinalidade de B, pegaremos o total de A e excluir a quantidade referente a restrição fornecida.

Cardinalidade de $A = (3000 - 1) + 1 = 3000$

Todos os números pares de A são:

$\{2; 4; 6; 8; 10; \ldots; 2998, 3000\}$ → progressão aritmetica de razão 2

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

$3000 = 2 + (n-1) \cdot 2$

$3000 = \cancel{2} + 2n - \cancel{2}$

$n = \frac{3000}{2} = 1500$

Cardinalidade de B = Total − restrição

" " $B = 3000 - 1500 = 1500$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular: Matemática

Nº 19085

② a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{[(n-1-(k-1)]!\,(k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!\,(k-1)!} = \boxed{\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}}$$

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!} = \boxed{\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!}}$$

Para provar a identidade, somaremos os dois termos do 2º membro.

$$\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)\cdot(n-k-1)!\,(k-1)!}{}_{(k)} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k\cdot(k-1)!}{}_{(n-k)}$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot k + (n-1)!\,(n-k)}{(n-k)\cdot k\cdot(n-k-1)!\,(k-1)!} = \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{(n-k)\cdot k\,(n-k-1)!\,(k-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,n}{(n-k)\cdot(n-k-1)!\,k\cdot(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Folha 2

2 b) $\binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$

Baseado no item (a) faremos as transformações necessárias.

$$\binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n-4}{k-4} + 1\binom{n-4}{k-3}} + 3\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 3\binom{n-4}{k-1} + \underbrace{1\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-3} + 6\underbrace{\binom{n-4}{k-2}} + 3\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-3}{k-3} + 3\underbrace{\binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-2}} + 3\binom{n-4}{k-2} + 3\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-3}{k-3} + 3\left[\binom{n-4}{k-3} + \binom{n-4}{k-2}\right] + 3\left[\binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1}\right] + \binom{n-3}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-3}{k-3} + 3\underbrace{\binom{n-3}{k-2}} + 3\underbrace{\binom{n-3}{k-1}} + \binom{n-3}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n-3}{k-3} + 1\binom{n-3}{k-2}} + 2\binom{n-3}{k-2} + 2\binom{n-3}{k-1} + \underbrace{1\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\left[\binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1}\right] + \binom{n-2}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1}} + \underbrace{\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19085

(2) c) Triângulo de Pascal:

$$\binom{0}{0} \longrightarrow 1$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1} \longrightarrow 1\ 1$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \longrightarrow 1\ 2\ 1$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \longrightarrow 1\ 3\ 3\ 1$$

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \longrightarrow 1\ 4\ 6\ 4\ 1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1} \cdots \binom{n}{n} \longrightarrow 1\ n \ldots n\ 1$$

Os coeficientes binomiais no item (b) fazem relação aos números apresentados acima no triângulo de Pascal.

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ pode ser resolvido de outra form como foi exposto no item (b).

No item (b) tivemos um caso particular p/ $m=4$.

$$\binom{n}{k} = \binom{4}{0}\binom{n-4}{k-4} + \binom{4}{1}\binom{n-4}{k-3} + \binom{4}{2}\binom{n-4}{k-2} + \binom{4}{3}\binom{n-4}{k-1} + \binom{4}{4}\binom{n-4}{k}$$

Generalizando, temos:

$$\binom{n}{k} = \binom{m}{0}\binom{n-m}{k-m} + \binom{m}{1}\binom{n-m}{k-(m-1)} + \binom{m}{2}\binom{n-m}{k-(m-2)} + \cdots \binom{m}{m}\binom{n-m}{k}$$

onde $0 \leq m \leq k$

Folha 4

(3) Utilizaremos como hipótese na demonstração da questão o Teorema de L'Hopital.

Considere a função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, sendo $q(x) \neq 0$.

$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$ é obtido pelo Teorema de L'Hopital derivando o numerador e o denominador e depois calculando o limite no ponto $x = a$, ou seja:

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{p'(x)}{q'(x)}.$$

Aplicando na questão (3), temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \cos 0 = 1$$

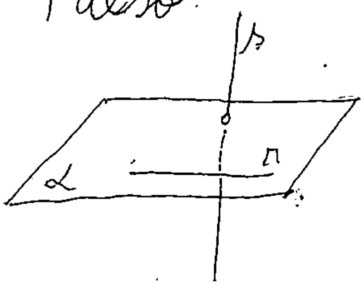
$$\lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Como queríamos demonstrar

Setor Curricular Matemática

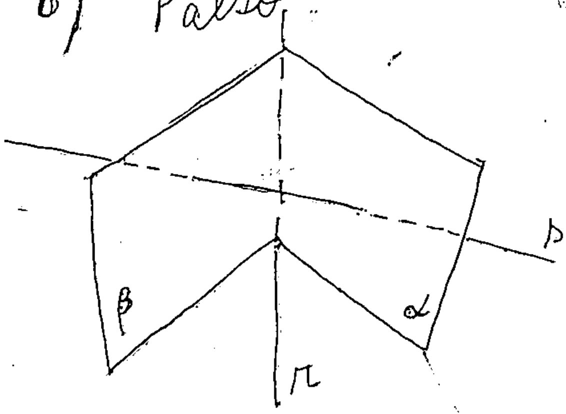
Nº 19085

4) a) Falso



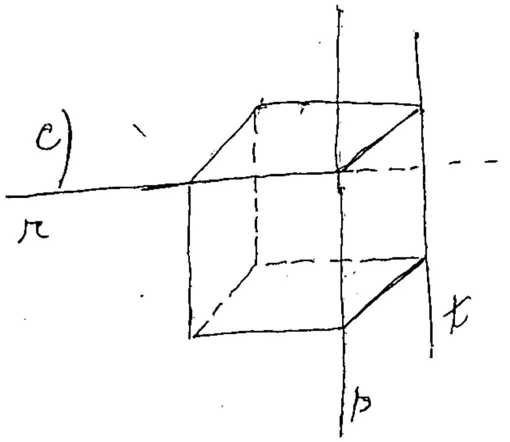
O desenho representa um contra-exemplo. Temos uma reta contida no plano α e uma reta s perfurando o plano α de modo que não sejam paralelas.

b) Falso



O desenho ao lado representa um contra-exemplo. Temos dois planos distintos e uma reta r comum aos dois. Tomemos uma outra reta s distinta de r atravessando os dois planos e não paralela a s. Elas não se intersectam. O que contradiz a implicação da afirmação.

c)



Falso. A reta r pode não pertencer ao mesmo plano que contém as retas s e t. A reta r pode ser reversa a t. O desenho ao lado exemplifica o que foi escrito anteriormente

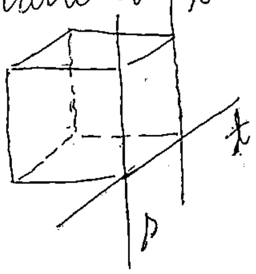
Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular: Matemática

Nº 19085

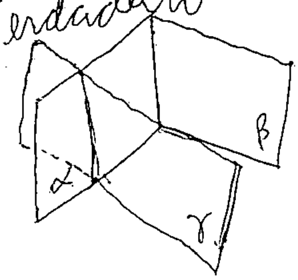
4) d) Verdadeiro.

e) Verdadeiro

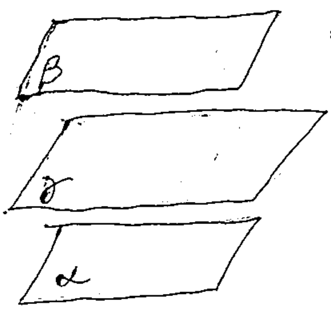


f) Verdadeiro

g) Verdadeiro



h)



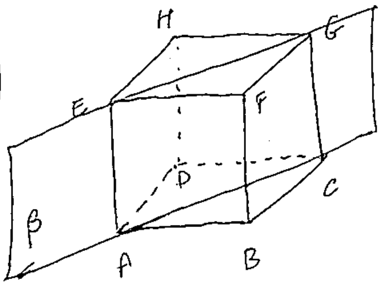
Verdadeiro.

Transitividade

$\alpha \parallel \gamma$ e $\gamma \parallel \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

i) Verdadeiro

j)



Falso.

Considere α o plano que contém o quadrado ABFE e γ o plano que contém o quadrado ABCD. Tome β perpendicular ao plano γ passando pelos pontos do ~~quadrado~~ retângulo EACG.

Os planos α e β se intersectam na reta $\overleftrightarrow{EA}$. O que contradiz a implicação da afirmação

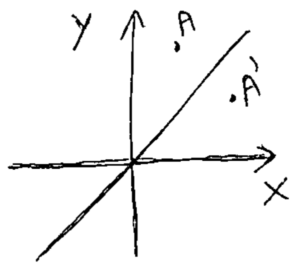
Folha 7

(5) $P(X_P, Y_P)$; $Q(X_Q, Y_Q)$ e $A(X_A; Y_A)$.

Podemos determinar as coordenadas do ponto A', simétrico de A em relação à reta $\overleftrightarrow{PQ}$ baseado em transformações lineares ou utilizando recursos da geometria analítica.

Desmembraremos em vários casos:

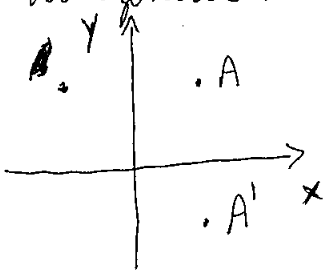
1º caso: A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ passa pela origem do sistema



$T(X;Y) = (Y;X)$, ou seja,

$A = (X_A; Y_A)$ e $A' = (Y_A; X_A)$

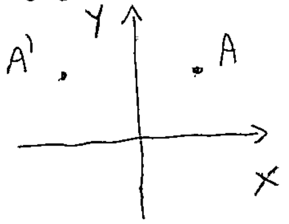
2º caso: A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é paralela ao eixo X, ou seja, horizontal.



$T(X;Y) = (X;-Y)$, ou seja,

$A = (X_A; Y_A)$ e $A' = (X_A; -Y_A)$

3º Caso: A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é paralela ao eixo Y, ou seja, vertical.



$T(X;Y) = (-X;Y)$, ou seja,

$A = (X_A; Y_A)$ e $A' = (-X_A; Y_A)$

⑤ 4º Caso: A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é oblíqua e não passa pela origem.

1º Devemos encontrar a equação da reta $\overleftrightarrow{PQ}$

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_P & Y_P & 1 \\ X_Q & Y_Q & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \left|\begin{matrix} X & Y & 1 \\ X_P & Y_P & 1 \\ X_Q & Y_Q & 1 \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix} X & Y \\ X_P & Y_P \\ X_Q & Y_Q \end{matrix}\right| = 0$$

$$-X_Q Y_P \quad -Y_Q X \quad -X_P Y \qquad X Y_P \quad Y X_Q \quad X_P Y_Q$$

2º $X\cdot(Y_P - Y_Q + Y\cdot(X_Q - X_P) + X_P Y_Q - X_Q Y_P = 0$

Achar o coef. angular da reta t perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ e que passa pelo ponto A.

$$m_{\overleftrightarrow{PQ}} = -\frac{(Y_P - Y_Q)}{X_Q - X_P}$$

$$m_r \cdot m_{\overleftrightarrow{PQ}} = -1 \Rightarrow m_r = \frac{-1}{-\frac{(Y_P - Y_Q)}{X_Q - X_P}} = \frac{X_Q - X_P}{Y_P - Y_Q}$$

3º Equação da reta t que passa por A

$$Y - Y_A = \left(\frac{X_Q - X_P}{Y_P - Y_Q}\right)\cdot(X - X_A)$$

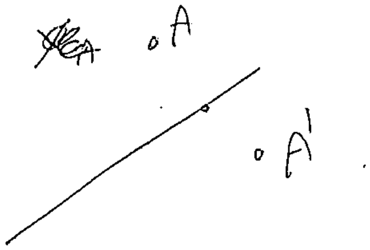
5 (c) Continuação

4º Resolver o sistema formado entre as equações das retas t e $\overleftrightarrow{PQ}$

$$\begin{cases} y - y_A = \left(\dfrac{x_Q - x_P}{y_P - y_Q}\right) \cdot (x - x_A) \\ x \cdot (y_P - y_Q) + y \cdot (x_Q - x_P) + x_P y_Q - x_Q y_P = 0 \end{cases}$$

Solução $(\alpha ; \beta)$

5º Utilizar o conceito de ponto médio de um segmento.



$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_A'}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_A'}{2} \end{cases}$$

$2\alpha = x_A + x_A'$ $\qquad$ $2\beta = y_A + y_A'$

$2\alpha - x_A = x_A'$ $\qquad$ $2\beta - y_A = y_A'$