UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	CAROLINA VIEIRA SCHILLER
Frase	"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." Paulo Freire

Nº Identificador 19086

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19086

"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." Paulo Freire

Questão 1: $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 3000\}$

$x \in B \Rightarrow 2x \notin B$

· Todos os ímpares podem pertencer a B pois não são dobro de nenhum natural. (ímpares menores que 3000)

$\{1, 3, 5, \dots, 2999\} \subset B \Rightarrow \#B \geq 1500$

Observe que como $1 \in B$, $2 \notin B$. Mas 4 pode pertencer a B pois é dobro de um elemento que não está lá. Seguindo o raciocínio, $8 \notin B$, mas $16 \in B$ (supondo aqui que estamos considerando B com a maior quantidade de elementos possível). Abaixo uma tabela para representar o raciocínio, aonde cada número riscado não pertence a B e os <u>não</u> riscados pertencem.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}
1	~~2~~	4	~~8~~	16	~~32~~	64	~~128~~	256	~~512~~	1024	~~2048~~
3	~~6~~	12	~~24~~	48	~~96~~	192	~~384~~	768	~~1536~~	—	—
5	~~10~~	20	~~40~~	80	~~160~~	320	~~640~~	1280	~~2560~~	—	—
7	~~14~~	28	~~56~~	112	~~224~~	448	~~896~~	1792	—	—	—
⋮											

Observe que os ímpares multiplicados por potência de 2 de expoente par poderão pertencer a B. Falta calcular quantos são eles. Abaixo uma tabela indicando quantos números até 3000 existem ~~como~~ múltiplos de cada potência de 2 e quantos deles são múltiplos de ímpares.

	2^0	~~2^1~~	2^2	~~2^3~~	2^4	~~2^5~~	2^6	~~2^7~~	2^8	~~2^9~~	2^{10}
TOTAL	3000	~~1500~~	750	~~375~~	187	~~93~~	46	~~23~~	11	~~5~~	2
(ÍMPARES)	1500	~~750~~	375	~~188~~	94	~~47~~	~~24~~ sem efeito 23	~~12~~	6	~~3~~	1

Logo, o valor máximo da cardinalidade de B é

$$1500 + 375 + 94 + \cancel{24} + 6 + 1 = 1999$$

sem efeito

+23+

Folha 1

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular: Matemática

Nº 19086

Questão 2:

a) Sabemos que $\binom{n}{k}$ pode ser interpretado como a quantidade de maneiras que podemos escolher k objetos distintos entre n objetos distintos dados, isto é, como um caso de combinação simples.

b) ~~$\binom{n}{k} = (k-$~~ Sem efeito

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} \quad \Big| \quad \binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$

Substituindo, temos:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$

$$\binom{n-2}{k-2} = \binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2} \quad \Big| \quad \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1} \quad \Big| \quad \binom{n-2}{k} = \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

Logo,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-3}{k-2} + 3\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

$$\binom{n-3}{k-3} = \binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3} \quad \Big| \quad \binom{n-3}{k-2} = \binom{n-4}{k-3} + \binom{n-4}{k-2}$$

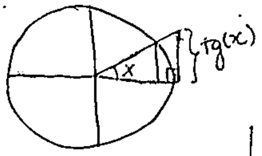
$$\binom{n-3}{k-1} = \binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1} \quad \Big| \quad \binom{n-3}{k} = \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + \underbrace{\binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-3}} + \underbrace{3\binom{n-4}{k-2} + 3\binom{n-4}{k-2}} + \underbrace{3\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k-1}} + \binom{n-4}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$$

Questão 3: Queremos demonstrar que $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.

Observe o círculo trigonométrico:



Vamos chamar de $A_1(x)$ a área o triângulo de base raio $(=1)$ e altura $tg(x)$.

$$\boxed{A_1(x) = \frac{1 \cdot tg(x)}{2}}$$

$A_2(x)$ será a área do setor circular definido pelo ângulo x.

$$\begin{matrix} 2\cancel{\pi} & \text{———} & \cancel{\pi} \cdot 1^2 \\ x & \text{———} & A_2(x) \end{matrix} \Rightarrow 2A_2(x) = x \Rightarrow \boxed{A_2(x) = \frac{x}{2}}$$

$A_3(x)$ é a área do triângulo cuja base é $\cos(x)$ e a altura mede $\text{sen}(x)$.

$$\boxed{A_3(x) = \frac{\cos(x) \cdot \text{sen}(x)}{2}}$$

Pela figura podemos concluir (sem perda de generalidade pois x se aproxima de zero e para $x<0$ o desenho será análogo no 4º quadrante) que:

$$A_1(x) \geq A_2(x) \geq A_3(x)$$

$$\frac{tg(x)}{2} \geq \frac{x}{2} \geq \frac{\cos x \cdot \text{sen}\, x}{2} \overset{\times 2}{\Longleftrightarrow} tg(x) \geq x \geq \cos x\, \text{sen}\, x$$

$$\overset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{tg\, x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\cos x\, \text{sen}\, x} \Longleftrightarrow \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\cos x\, \text{sen}\, x}$$

$$\overset{\cdot \text{sen}\, x}{\Longleftrightarrow} \frac{\cancel{\text{sen}\, x} \cos x}{\cancel{\text{sen}\, x}} \leq \frac{1 \cdot \text{sen}\, x}{x} \leq \frac{1}{\cos x \cdot \cancel{\text{sen}\, x}} \cdot \cancel{\text{sen}\, x} \Longleftrightarrow$$

$$\cos x \leq \frac{\text{sen}\, x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Como quando $x \to 0$, $\cos x \to 1$ (um)

Temos que $\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ e $\frac{1}{\cos x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

Logo, pelo teorema do "sanduíche", $\frac{\text{sen}\, x}{x}$ tende a 1 quando x tende a zero.

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19086

Questão 5 (1º caso) Se P e Q são coincidentes então PQ é qualquer reta que passe por P. Nesse caso A' dependeria da escolha de PQ.

2º caso) Se $P \neq Q$, então faremos as seguintes etapas:

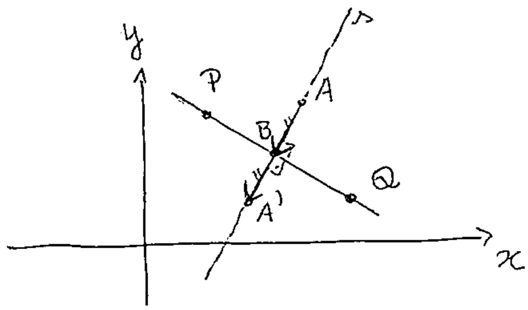
i) Determinar a equação vetorial da reta PQ.

ii) Determinar a equação vetorial da reta s, que contém A e é perpendicular à reta PQ.

iii) Encontrar as coordenadas do ponto B, interseção das retas s e PQ.

iv) Determinar o vetor $\overrightarrow{AB}$.

v) O ponto A' será a extremidade de $\overrightarrow{AB}$ quando aplicado no ponto B.



i) $\overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P)$

reta PQ: $P + \overrightarrow{PQ}t = (x_P + (x_Q - x_P)t, \ y_P + (y_Q - y_P)t)$

ii) Queremos $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \perp \overrightarrow{PQ}$, isto é, $\vec{v} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$

Se $\vec{v} = (a, b) \neq (0,0)$, então

$\vec{v} \cdot \overrightarrow{PQ} = a(x_Q - x_P) + b(y_Q - y_P) = 0$

Tome $a = (y_Q - y_P)$ e $b = -(x_Q - x_P)$ pois

$(y_Q - y_P)(x_Q - x_P) + -(x_Q - x_P)(y_Q - y_P) = 0$

Logo, $\vec{v} = (y_Q - y_P, -(x_Q - x_P))$ é um vetor diretor de s.

$s: A + \vec{v} \cdot k = (x_A + (y_Q - y_P)k, \ y_A - (x_Q - x_P)k)$

iii) Procuramos a interseção B das retas s e PQ.

$A + \vec{v}k = P + \overrightarrow{PQ}\,t$

(continua ⟶)

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular: Matemática

Nº 19086

continuação (questão 5):

$$\begin{cases} x_A + (y_Q - y_P)K = x_P + (x_Q - x_P)t & (1) \\ y_A - (x_Q - x_P)K = y_P + (y_Q - y_P)t & (2) \end{cases}$$

Supondo $y_Q - y_P \neq 0$ (se $y_Q - y_P = 0$, então $x_Q - x_P \neq 0$ e o raciocínio é análogo)

Então, por (1) temos que

$$K = \frac{x_P - x_A + (x_Q - x_P)t}{(y_Q - y_P)}$$

Substituindo em (2) obtemos

$$y_A - (x_Q - x_P)\left[\frac{x_P - x_A + (x_Q - x_P)t}{y_Q - y_P}\right] = y_P + (y_Q - y_P)t$$

$$-(x_Q - x_P)\left[(x_P - x_A) + (x_Q - x_P)t\right] = \left[(y_P - y_A) + (y_Q - y_P)t\right](y_Q - y_P)$$

$$-(x_Q - x_P)(x_P - x_A) - (x_Q - x_P)^2 t = (y_Q - y_P)(y_P - y_A) + (y_Q - y_P)^2 t$$

$$-(y_Q - y_P)(y_P - y_A) - (x_Q - x_P)(x_P - x_A) = (y_Q - y_P)^2 t + (x_Q - x_P)^2 t$$

$$\Rightarrow t = \frac{-(y_Q - y_P)(y_P - y_A) - (x_Q - x_P)(x_P - x_A)}{(y_Q - y_P)^2 + (x_Q - x_P)^2} \rightarrow$$ A esse valor chamaremos de t_1 para abreviação.

$(y_Q - y_P)^2 + (x_Q - x_P)^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2$ e $-\left[(y_Q - y_P)(y_P - y_A) + (x_Q - x_P)(x_P - x_A)\right] = -\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AP}$

$$t_1 = \frac{-\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AP}}{\|PQ\|^2}$$

Logo, $B = \left(x_P + (x_Q - x_P)t_1\,,\; y_P + (y_Q - y_P)t_1\right)$

iv) $\overrightarrow{AB} = B - A = \left(x_P + (x_Q - x_P)t_1 - x_A\,,\; y_P + (y_Q - y_P)t_1 - y_A\right)$

$A' = (c, d)$

v) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA'}$

$B - A = A' - B \Rightarrow A' = 2B - A$

Sem efeito

~~$A' = (2x_P + 2(x_Q - x_P)t_1\,,\; 2y_P$~~

$$\boxed{A' = \left(2x_P + 2(x_Q - x_P)t_1 - x_A\,,\; 2y_P + 2(y_Q - y_P)t_1 - y_A\right)}$$

Setor Curricular
Matemática

Nº 19086

Questão 4

a) Falso, podem ser reversas.

b) Falso, podem ser reversas.

c) Falso, podem ser reversas.

d) Verdadeiro.

e) Falso, podem ser reversas ou concorrentes também.

f) Verdadeiro.

g) Verdadeiro.

h) Verdadeiro.

i) Verdadeiro

j) Falso, podem ser ortogonais dois-a-dois.