UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	YGOR DAVID TAVARES DA SILVA
Frase	"Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire
Reescreva a frase	Não é o silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire

Nº Identificador 19087

Frase: "Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire

Questão 1: Se $B \subset A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 3000\}$ então está incluído os números pares e ímpares ou números ímpares ou números pares, diferentes de zero.

Qualquer valor número ímpar está dentro de B pois não é múltiplo de 2. Ou seja, $\frac{3000}{2} = 1500$

Se todos os ímpares até 3000 estão lá os seus dobros não podem estar. Como só há, no conjunto, até o dobro do número 1499 (último ímpar menor que a metade de 3000) de ímpares então:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 6 \\ 5 \rightarrow 10 \\ \vdots \quad\ \vdots \\ 1499 \rightarrow 2998 \end{array}\right\} \text{não estão no conjuntos}$$

Quantidade que isto representa: É a quantidade de números ímpares na sequência $(1, 3, 5, \ldots, 1499)$.

Por P.A.: $a_n = 1499 = 1 + (n-1) \cdot 2 \Leftrightarrow 1498 = 2(n-1) \Leftrightarrow n-1 = 749$
$\boxed{n = 750}$

Sobram 750 números pares que devemos identificar se estão ou não em B, mas se nenhum destes 750 pares não são o dobro de um ímpar, então são o dobro de um par. Portanto metade deles são o dobro de um par que já está na lista do conjunto de B.

Portanto $\#B = \underbrace{1500}_{\text{ímpar}} + (1500 - \underbrace{750}_{\text{dobro de ímpares}} - \underbrace{325}_{\text{dobro do dobro que está no conjunto}})$

$\#B = 1500 + 325 = 1825$

Frase: "Não é o silêncio que os homens se fazem, mas na palavra no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire.

Questão 2

(a) Supondo que queira montar um uniforme de uma equipe com 3 camisas diferentes e disponho de 5 camisas diferentes.

i) O número de maneiras de escolher 3 camisas diferentes em um universo de 5 camisas diferentes é $\binom{5}{3} = 10$.

ii) Analogamente posso escolher 3 camisas diferentes em um universo de 4 camisas, excluindo 1 delas (chamemos de C_1). Isto resulta em $\binom{4}{3} = 4$

Agora escolho 2 camisas em um universo de 4 camisas distintas visto que a terceira camisa, a que chamamos de C_1, já foi escolhida. Portanto $\binom{4}{2} = 6$.

Ora $\binom{4}{3} + \binom{4}{2}$ é a mesma situação que é nos proporcional, ou seja, o resultado $\binom{5}{3}$.

Generalizando: Se fossem n camisas distintas ~~para~~ dentre as quais iríamos escolher K distintas, por uma discussão análoga chegaríamos que:

i) $\binom{n}{K}$

ii) $\binom{n-1}{K}$ e $\binom{n-1}{K-1}$

E que $\binom{n}{K} = \binom{n-1}{K} + \binom{n-1}{K-1}$

Frase: "Não é o silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação - reflexão" Paulo Freire

Questão 2

b) Ora $\binom{x}{y} = \binom{x-1}{y-1} + \binom{x-1}{y}$ Relação de Stifel.

$$\underbrace{\binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3}} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k} =$$

$$\binom{n-3}{k-3} + 3\underbrace{\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2}} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k} =$$

$$\binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-3}{k-2} + 3\underbrace{\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1}} + \binom{n-4}{k} =$$

$$\binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-3}{k-2} + 3\binom{n-3}{k-1} + \underbrace{\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}} =$$

$$\underbrace{\binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-3}{k-2}} + 3\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} =$$

$$\binom{n-2}{k-2} + 2\underbrace{\binom{n-3}{k-2} + 3\binom{n-3}{k-1}} + \binom{n-3}{k} =$$

$$\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \underbrace{\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}} =$$

$$\underbrace{\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1}} + \binom{n-2}{k} =$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \underbrace{\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}} =$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

FRASE: Não é o silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire

Questão 2

(c) Para fazer sentido com a questão mudarei os dados para: escolher 6 camisas distintas em um universo de 10 camisas distintas, ou seja, $n=10$ e $k=6$.

- Supondo que as camisas estejam no conjunto $\{c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_{10}$

I) Se ~~fixarmos~~ fixarmos 4 camisas previamente, teremos que escolher 6 camisas em um universo de 6, ou seja, $\binom{6}{6}$.

II) Se não queremos que 4 destas camisas sejam escolhidas o total de maneiras de escolhermos 5 destas camisas dentre as 6 restantes é $\binom{6}{5}$ porém isto pode acontecer de 4 maneiras incluindo, uma a uma, as que retiramos previamente pois a ordem não importa. Ou seja: $4 \cdot \binom{6}{5}$

Ilustração: $\{ \underbrace{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6}_{\text{possibilidade}}, c_7, c_8, c_9, c_{10}$ fixando

III) Por um raciocínio análogo, se quisermos escolher 4 camisas dentre 6 disponíveis é $\binom{6}{4}$ porém esta escolha pode ser feita $3! = 6$ maneiras diferentes, ou seja, $6\binom{6}{4}$

IV) Analogamente, se quisermos escolher 3 camisas distintas dentre 6 disponíveis, resulta em $\binom{6}{3}$ porém esta escolha pode ser feita $2! = 2$ maneiras distintas, ou seja, $4\binom{6}{3}$

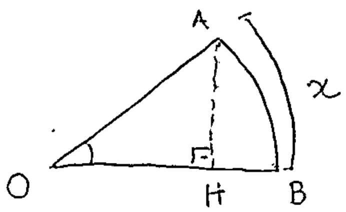
V) Repetindo o raciocínio, queremos escolher 2 camisas distintas dentre 6 disponíveis, resulta em $\binom{6}{2}$ que já ~~não~~ nos mostra os resultados possíveis neste item.

Logo o total de maneiras de escolher ~~10~~ 6 camisas distintas em um universo de ~~6~~ 10 disponíveis é a soma de I, II, III, IV e V.

Frase: "Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire

Questão 3 : Aqui farei duas demonstrações, uma visual e outra pela definição.

- Ideia de demonstração visual.



Seja $\hat{AOB}$ um recorte do ciclo trigonométrico de raio $\overline{OA} = 1$. Seja o arco $\widehat{AB} = x$ e $AH = \operatorname{sen} x$ pois, pela definição de seno, no triângulo retângulo $O\hat{H}A$ temos $\frac{AH}{1} = \operatorname{sen} x$.

Se $x \to 0$, cada vez mais $\widehat{AB}$ e $\overline{AH}$ se assemelham e tendem a ficar iguais, logo, parece razoável supor que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

- Pela definição: Seja $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Pela definição temos:

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ se $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 : x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1|$

- ~~Por teorema temos que o produto de uma limitada função por um infinitesimo~~

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \varepsilon + 1$$

~~Se sen x > 0 ⟺ 0 <~~ $\frac{1}{x} < \frac{\varepsilon+1}{\operatorname{sen} x} < \frac{\varepsilon+1}{1} \iff 0 < x$

~~maior valor~~

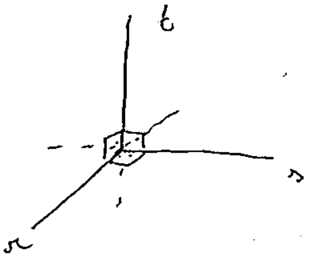
fazendo $\delta > 0$ temos $x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \frac{\operatorname{sen} x}{\delta}$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 > \frac{\operatorname{sen} x}{\delta} - 1 \geq -\frac{1}{\delta} - 1 = \varepsilon$$

Frase: Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão". Paulo Freire.

Questão 4

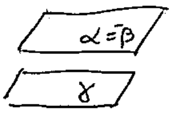
(e) Falso. Se são perpendiculares dois a dois, como o canto de uma sala, temos que r e s não são paralelos.



(f) Verdadeiro seguindo nossa distinção entre paralelos e coincidentes.

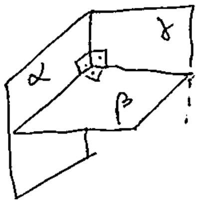
g) Verdadeiro.

(h) Falso, pois α e β podem ser coincidentes, seguindo nossa definição no início da questão.



i) Verdadeiro.

j) Falso. Podem ser perpendicular dois a dois, como os planos xOy, yOz e xOz, ~~as~~ ilustrados na figura ao lado

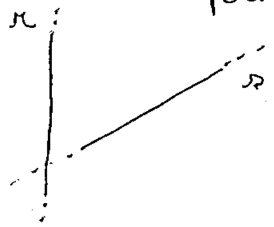


Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular HATEMÁTICA	Nº 19087.

Frase: Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire

Questão 4 Utilizarei nesta questão uma diferenciação entre paralelas e coincidentes no caso de reta e plano.

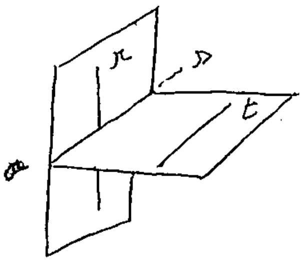
(a) Falso. Se ~~~~ r e s não se cortam elas, ou são paralelas se forem coplanares, ou são reversas.



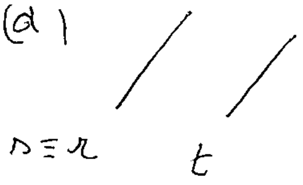
O desenho ilustra retas reversas, ou seja estão contidas em planos distintos.

(b) Falso. Como no exemplo acima, retas reversas são retas que não se intersectam e também não são paralelas, pois não estão contidas no mesmo plano.

(c) Falso. Se r é reversa a t, elas não se intersectam, mesmo s e t sendo paralelas, como ilustra o desenho



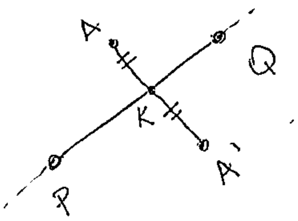
(d)



Falso seguindo a diferenciação descrita acima, pois s e r podem ser coincidentes, ou seja, representam o mesmo conjunto de pontos, como ilustra o desenho ao lado

FRASE: "Não é o silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão". Paulo Freire.

Questão 5



Primeiro achemos o vetor $\vec{PQ}$:
$\vec{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P)$ pois a reta que contém A e A' tem vetor diretor perpendicular a $\vec{PQ}$, ou seja, $\vec{AA'} \cdot \vec{PQ} = 0$.
$\vec{AA'} = (y_Q - y_P, -(x_Q - x_P))$.

Chamemos de r a reta que contém P e Q:
$r: (x, y) = (x_P, y_P) + t_2 (x_Q - x_P, y_Q - y_P)$

Chamemos de s a reta que contém A e A'.
$s: (x, y) = (x_A, y_A) + t_1 (y_Q - y_P, x_P - x_Q)$

Seja $K = s \cap r$. ~~suas coordenadas:~~

$$s \cap r : \begin{cases} x_A + t_1 \cdot (y_Q - y_P) = x_P + t_2 (x_Q - x_P) \\ y_A + t_1 (x_P - x_Q) = y_P + t_2 (y_Q - y_P) \end{cases}$$

Com esta informação, resolvendo um sistema, podemos achar o valor de t_1 e substituimos na equação s, obtendo assim, as coordenadas de K.

A distância de A até r é igual a distância de A' até r.
Logo, fazendo a equidistância entre as duas, chegamos no ponto K.

Se $K = (x_K, y_K)$ então $x_K = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$ e $y_K = \frac{y_A + y_{A'}}{2}$

E assim obtemos as coordenadas de A'.