UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	VITOR DUTRA SOARES ROSADAS
Frase	"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor."

Nº Identificador 19109

Setor Curricular Matemática

Nº 19109

Questão 1

"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor"

Dado $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 3000\}$ tem-se que $A = \{1, 2, 3, \ldots, 3000\}$.

Assim, A possui 2^{3000} subconjuntos.

Seja $B \subset A$ onde se $x \in B \Rightarrow 2x \notin B$.

Tomando-se apenas os números ímpares de A - ou seja - $\{1, 3, 5, 7, \ldots, 2999\}$, temos 1500 números onde não acontece que $x \in B \Rightarrow 2x \notin B$.

Assim, $\{1, 3, 5, 7, \ldots, 2999\}$ possui 2^{1500} subconjuntos.

Analogamente, os pares possuem 2^{1500} subconjuntos.

O conjunto de todos os elementos da forma $2x$, temos $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 3000\}$.

A cardinalidade de B é

$$2^{3000} - \left(2^{1500} + 2^{750}\right)$$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular: Matemática

Nº 19.109

Questão 2

c) Tenho 10 amigos e quero escolher 3 ou 4 (~~[illegible]~~ sem efeito) amigos para ir ao cinema. De quantas maneiras posso fazer isso?

- Se escolhermos 3 amigos dentre 10, temos:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{3!\,\cancel{7!}} = \frac{10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 1} = 120 \text{ maneiras}$$

- Se escolhermos 4 amigos dentre 10, temos:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \overset{1}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 1\cdot \cancel{6!}} = 210 \text{ maneiras}$$

logo $\binom{10}{3} + \binom{10}{4} = 120 + 210 = 330$ maneiras.

- Podemos tomar como solução, ao me incluir entre os amigos, escolher 4 deles, ou seja, agora somos 11 pessoas.

$$\binom{11}{4} = \frac{11!}{4!\,7!} = \frac{11\cdot 10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \overset{1}{\cancel{8}}\cdot \cancel{7!}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 1\cdot \cancel{7!}} = 330 \text{ maneiras.}$$

Assim provamos que $\binom{11}{4} = \binom{10}{3} + \binom{10}{4}$ utilizando um argumento combinatório para $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Questão 2)

b) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ e $\binom{n-1}{k}=\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}$

$\binom{n-1}{k-1}=\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-2}{k-1}$ e $\binom{n-2}{k-1}=\binom{n-3}{k-2}+\binom{n-3}{k-1}$

$\binom{n-2}{k-2}=\binom{n-3}{k-3}+\binom{n-3}{k-2}$ e $\binom{n-3}{k-2}=\binom{n-4}{k-3}+\binom{n-4}{k-2}$

$\binom{n-3}{k-3}=\binom{n-4}{k-4}+\binom{n-4}{k-3}$ e $\binom{n-2}{k}=\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k}$

Assim, $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

$\binom{n}{k}=\underbrace{\binom{n-2}{k-2}}+\underbrace{\binom{n-2}{k-1}}+\underbrace{\binom{n-2}{k-1}}+\underbrace{\binom{n-2}{k}}$

$\binom{n}{k}=\binom{n-3}{k-3}+\binom{n-3}{k-2}+\binom{n-3}{k-2}+\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k-2}+\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k}$

$\binom{n}{k}=\binom{n-4}{k-4}+\binom{n-4}{k-3}+\binom{n-4}{k-3}+\binom{n-4}{k-2}+\binom{n-4}{k-3}+\binom{n-4}{k-2}+\binom{n-4}{k-2}+\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k-3}+\binom{n-4}{k-2}+$

$+\binom{n-4}{k-2}+\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k-2}+\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k}$

ou seja,

$$\binom{n}{k}=\binom{n-4}{k-4}+4\cdot\binom{n-4}{k-3}+6\cdot\binom{n-4}{k-2}+4\cdot\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k}$$

Setor Curricular matemática

Nº 19109

Questão 2)

c) $\binom{11}{4} = \binom{10}{3} + \binom{10}{4}$.

$\binom{11}{4} = \binom{7}{0} + 4 \cdot \binom{7}{1} + 6 \cdot \binom{7}{2} + 4 \cdot \binom{7}{3} + \binom{7}{4}$

Ao escolhermos 4 amigos dentre 11 para ir ao cinema, tal solução pode consistir em:

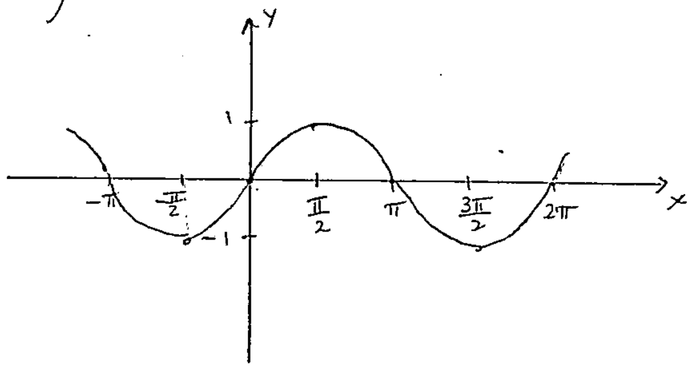
1) escolher um grupo de zero amigos dentre 7;
2) adicionarmos 4 grupos onde de 7 amigos escolhemos 1;
3) adicionarmos 6 grupos onde de 7 amigos escolhemos 2;
4) adicionarmos 4 grupos onde de 7 amigos escolhemos 3;
5) e adicionar 1 grupo onde de 7 amigos escolhemos 4.

Questão 3)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$ onde Dom: $\mathbb{R}$ e Im: $[-1,1]$

O gráfico de $f(x)$ é:



Temos que $\operatorname{sen} 0 = 0$.

Considere $\operatorname{sen}(0{,}001) \cong 0{,}001$ e $\operatorname{sen}(-0{,}001) \cong -0{,}001$

Sendo assim, $\dfrac{\operatorname{sen}(-0{,}001)}{-0{,}001} \cong \dfrac{-0{,}001}{-0{,}001} \cong 1$ e

$$\frac{\operatorname{sen}(0{,}001)}{0{,}001} \cong \frac{0{,}001}{0{,}001} \cong 1$$

Assim, os limites laterais são iguais e se

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

logo $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Questão 4)

a) Falso. As retas r e s podem ser reversas.

b) Falso. Do mesmo modo que o item (a), elas podem ser reversas. Tal fato só poderia acontecer se elas fossem coplanares.

c) Falso. pois r e t podem ser reversas.

d) Verdadeiro.

e) Falso. Podemos ter planos paralelos e retas reversas entre si.

f) Verdadeiro.

g) Verdadeiro

h) Verdadeiro

i) Verdadeiro

j) Falso, eles podem ser planos coincidentes.

Questão 5)

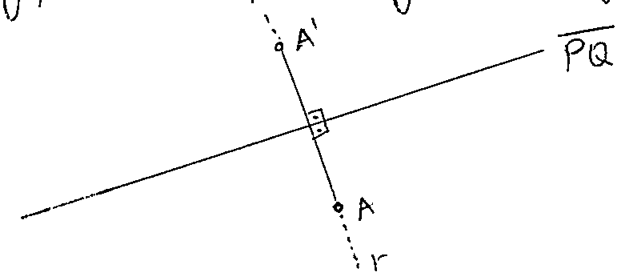
Seja $P(x_p, y_p)$ e $Q(x_q, y_q)$

A equação geral da Reta $\overline{PQ}$ é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ x_p & y_p \\ x_q & y_q \end{matrix} = 0$$

$$x y_p + y x_q + x_p y_q - x_q y_p - x y_q - y x_p = 0$$

$$(y_p - y_q)x + (x_q - x_p)y + (x_p y_q - x_q y_p) = 0$$



A reta que contém AA' é perpendicular à reta $\overline{PQ}$, sendo assim, a reta suporte r de AA' é:

$$y = -\frac{(x_q - x_p)}{(y_p - y_q)} x + n$$ como a mesma passa por $A\,(x_A, y_A)$

$$y_A = \frac{-(x_q - x_p)}{((y_p) - y_q)} \cdot x_A + n \Rightarrow n = y_A + \left(\frac{x_q - x_p}{y_p - y_q}\right) \cdot x_A$$

logo

$$r: y = -\frac{(x_q - x_p)x}{(y_p - y_q)} + \left(\frac{x_q - x_p}{y_p - y_q}\right) x_A + y_A$$

Setor Curricular: Matemática

Nº 19.109

Questão 5)

continuação)

se $A'(x_{A'}; y_{A'}) \in r$, temos

$$y_{A'} = -\frac{(x_q - x_p)}{(y_p - y_q)} \cdot x_{A'} + \left(\frac{x_q - x_p}{y_p - y_q}\right) x_A + y_A$$

a distância de A para $\overline{PQ}$ é igual à distância de A' para $\overline{PQ}$.

$$|(y_p - y_q)x_A + (x_q - x_p)y_A| = |(y_p - y_q)x_{A'} + (x_{\cancel{p}} - x_q) \cdot y_{A'}|$$

$$(y_p - y_q)x_A + (x_q - x_p)y_A = (y_p - y_q)x_{A'} + (x_{\cancel{p}} - x_q) \cdot \left[-\frac{(x_q - x_p)}{y_p - y_q} \cdot x_{A'} + \left(\frac{x_q - x_p}{y_p - y_q}\right) x_A + y_A\right]$$