UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

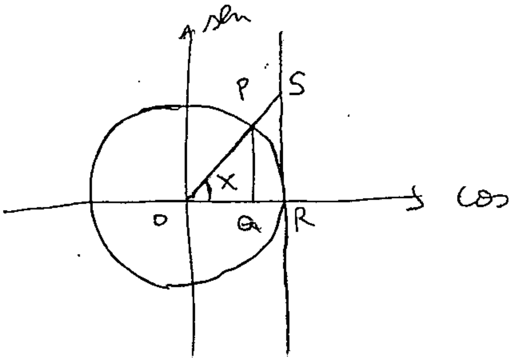
Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

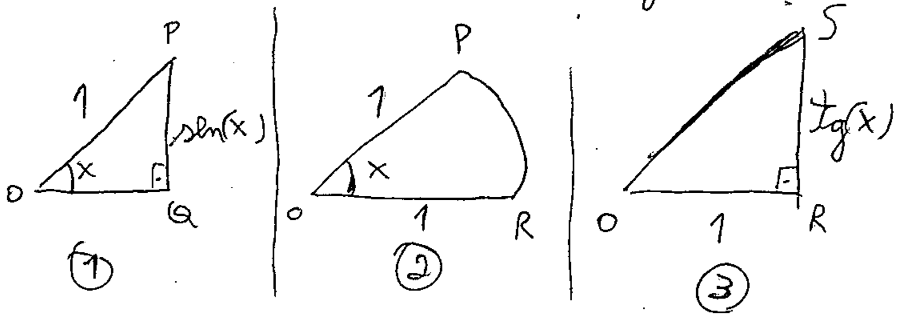
Setor	MATEMÁTICA
Candidato	IAGO ARCAS DA FONSECA
Frase	"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire.
Nº Identificador	19129

"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire.

Q.3 Seja o círculo trigonométrico:



observe as 3 ~~figuras~~ figuras a seguir:



Claramente: Área ① ≤ Área ② ≤ Área ③, daí temos:

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot 1\cdot sen(x) \le \frac{\cancel{\pi}\cdot 1^2\cdot x}{\cancel{2}\cancel{\pi}} \le \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 1\cdot tg(x) \quad (\times 2)$$

$$sen(x) \le x \le tg(x)$$

$$x \le \frac{sen(x)}{cos(x)} \therefore \boxed{cos(x) \le \frac{sen(x)}{x}}\ (2) \quad ; x \neq 0$$

$$sen(x) \le x$$

$$\boxed{\frac{sen(x)}{x} \le 1}\ (1) \quad ; x \neq 0$$

De (1) e (2) tem-se que:

$$\boxed{cos(x) \le \frac{sen(x)}{x} \le 1}\ (3) \quad ; x \neq 0$$

sen(x) é uma função limitada: $-1 \le sen(x) \le 1$.

E por (3), temos que $\frac{sen(x)}{x}$; $x \neq 0$ também é limitada.

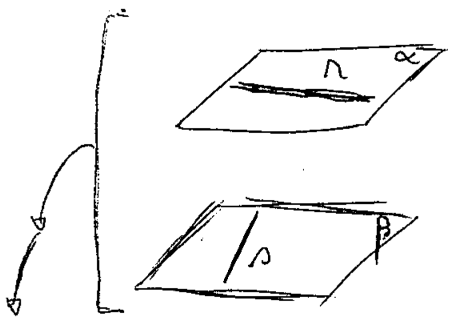
Em (3), façamos $\lim\limits_{x\to 0}$: $\cos(x) \le \dfrac{sen(x)}{x} \le 1$

$$\lim_{x\to 0}\cos(x) \le \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} \le \lim_{x\to 0} 1$$

(*) $\downarrow$ 1 $\qquad$ $\downarrow$ 1 $\qquad$ $\downarrow$ 1

(*) O Teorema do Confronto, ou do Sanduíche nos garante que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{x} = 1}$ $\square$

Q.4 (a) F. r//s quando ambas estão no mesmo plano e não se tocam (cortam). Se $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ (só um exemplo) tais que:

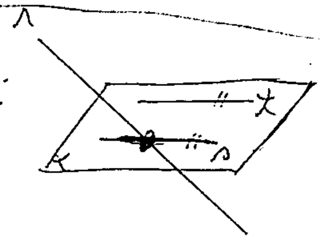


Temos que r e s não se cortam, mas não são paralelas.

(contra-exemplo) (Seria V somente no espaço bidimensional)

(b) F. O mesmo contra-exemplo do item (a). não são paralelas, e não se intersectam.

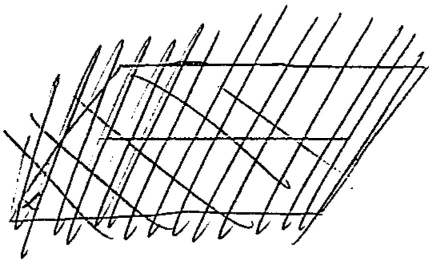
(c) F. Tome $s, t \in \alpha$; $s // t$. E $r \notin \alpha$ de modo que:



Temos as condições da hipótese, mas r não corta t.

(d) V.

~~(Q4) I. Seria V somente na geometria Euclidiana Plana (espaço bidimensional),~~
~~Sejam s, t e α; s ⊥ t, e r ∦ α, com ... , tais que):~~



(e) V

(f) V

(g) V

(h) V

(i) V

(j) V □

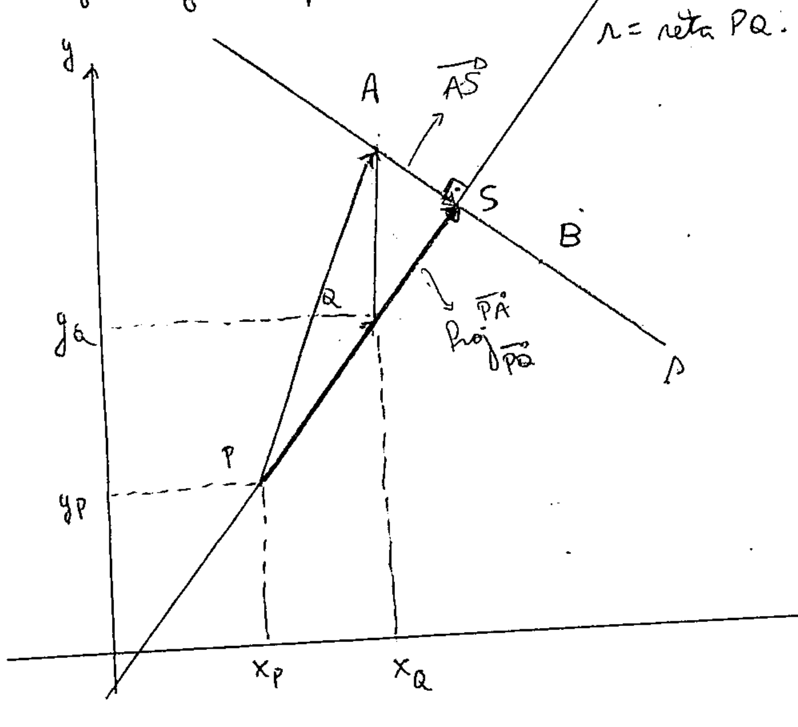
OBS: Acredito que nas letras (h) e (j) houve um erro de digitação, em ambas o mesmo erro.

(1º): "..., então α a ..." . (1º "erro")

(2º): "..., e β e também ..." . (2º "erro")

Entendi e fiz os itens eliminando o a em (1º), e o e em (2º). Pois acredito que seria o que a questão estava pedindo de fato, porém posso estar enganado.

Q.5 Vamos usar uma "ilustração" somente como ideia, P, Q e A podem estar em quaisquer posições além dessa que colocamos.



Achando a reta PQ, reta r.

$\vec{v} = \vec{PQ} = Q - P = (x_Q - x_P,\ y_Q - y_P)$

$$r: \begin{cases} x = \underbrace{x_P}_{\text{ponto } P} + \underbrace{(x_Q - x_P)}_{\text{vetor diretor } \vec{v}} t \\ y = y_P + (y_Q - y_P) t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19129

(1º) note que se $A \in r$, temos que seu simétrico: A', é ele mesmo, ie $A = A'$. ~~[illegible]~~ Isso vem pela definição.

Def: A' é o simétrico de A em relação a reta r quando ambas as condições são satisfeitas: (i) $\overline{AA'} \perp r$, (ii) $d(r,A) = d(r,A')$.

Dado isso, considere $A \notin r$, por exemplo (somente um caso) como na figura.

Considere agora o vetor $\vec{PA}$ ou $\vec{QA}$ (ambos podem ser tomados em qualquer caso). Vamos fazer a projeção ortogonal de $\vec{PA}$ (ou $\vec{QA}$) sobre o vetor $\vec{PQ}$ (note pela ilustração que dará o mesmo vetor, por isso ambos servem), usaremos $\vec{PA}$. $\vec{PA} = A - P = (x_A - x_P, y_A - y_P)$

$$proj_{\vec{PQ}} \vec{PA} = \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|^2} \vec{PQ} = \underbrace{\frac{(x_A - x_P).(x_Q - x_P) + (y_A - y_P).(y_Q - y_P)}{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}}_{(\Delta) \; = \; \alpha \text{ (alfa)}} \vec{PQ}$$

Esse vetor, ~~[illegible]~~ sendo visto agora como um ponto, é o ponto S da reta r.

$$S = \alpha . \vec{PQ} = (\alpha(x_Q - x_P), \alpha(y_Q - y_P)).$$

Tome s a reta que passa por A e S:

$$\vec{AS} = S - A = (\alpha(x_Q - x_P) - x_A, \alpha(y_Q - y_P) - y_A)$$

$$s = \begin{cases} x = \underbrace{x_A}_{} + \underbrace{(\alpha(x_Q - x_P) - x_A)t}_{} \\ y = \underbrace{y_A}_{A} + \underbrace{(\alpha(y_Q - y_P) - y_A)t}_{\text{vetor diretor}} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Note que:
$t = 0$, temos o ponto A.
$t = 1$, temos o ponto S

Folha 4

Note que pela projeção ortogonal feita, temos que $r \perp s$.

Se $\boxed{t=2}$, teremos um ponto a direita de S, ~~de modo que~~

$$B = \begin{cases} x = x_A + (\alpha(x_Q - x_P) - x_A) \cdot 2 \\ y = y_A + (\alpha(y_Q - y_P) - y_A) \cdot 2 \end{cases} \quad (*)$$

De modo que $\|\vec{AS}\| = \|\vec{SB}\|$, e $B \in s$ claramente. Logo temos que $B = A'$ ~~...~~ (o simétrico de A em relação a r) e suas coordenadas são as apresentadas em (*), onde α é uma constante, cuja expressão se encontra em (Δ), isso ocorre pois satisfazemos as condições da definição dada no início da questão.

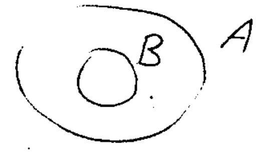
E na forma paramétrica da reta, em $t=0$, $\underbrace{\text{temos o ponto inicial}}_{A}$, e $t=1$, $\underbrace{\text{o 2º ponto considerado}}_{S}$.

Ao fazer $t=2$, temos B, de modo que $\|\vec{AS}\| = \|\vec{SB}\|$

P/ $t=3$, teremos C; $\|\vec{AS}\| = \|\vec{SB}\| = \|\vec{BC}\|$. E assim por diante. □

~~Ou seja o parâmetro "se move" sobre a reta no comprimento de $\|\vec{AS}\|$, essa é uma grande vantagem da forma paramétrica da reta.~~

Q1. Como $B \subset A$, todos os elementos de B são elementos de A. Daí vem que: Se $x \in B \Rightarrow x \in A$.



A definição de B é: $x \in B \Rightarrow 2x \notin B$.

"Vendo" essa definição em termos do conjunto A, temos que:

$x \in B \Rightarrow 2x \notin B$

"$x \in A \Rightarrow 2x \notin A$"

Isso nos diz que, os elementos da forma $2x \notin B$, são os elementos $2x \notin A$, ou seja estão fora de A, logo são elementos do tipo:

$\alpha \in \mathbb{N}^*;\ \alpha > 3000$.

Tomando $\alpha = 2x$: $2x > 3000 \therefore \boxed{x > 1500}$ (*)

Logo os elementos de B são "da forma" $\boxed{x > 1500}$, i.e., ~~satisfazem~~, precisam satisfazer essa condição.

Note que: $\underbrace{\#A}_{n(A)} = 3000$. Como $B \subseteq A$ temos que $\#B \leq \#A$.

Ou seja: $\#B \leq 3000$. ~~Logo os elementos~~ Como os elementos de A são $A = \{1, 2, \ldots, 3000\}$, e os de B precisam respeitar a condição (*) temos que os elementos de B estão compreendidos no seguinte conjunto: $[1501, 3000]$.

Logo a cardinalidade máxima que B pode assumir é o número de elementos desse conjunto ou seja:

$[1501, 3000]$

possui os elementos: $1501, 1502, \ldots, 2999, \ldots 3000$.

São, em quantidade: $3000 - 1501 + 1 = 1500$ elementos.

Daí, o valor máximo da cardinalidade que B pode assumir é 1500 elementos. $\square$

Q2 - (b) Veja dessa forma o lado direito da igualdade:

$$\underbrace{\binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\binom{n-4}{k-3}}_{(*)} + \underbrace{\binom{n-4}{k-3}}_{(\Delta)} + \underbrace{\binom{n-4}{k-3}}_{(\square)} + \underbrace{\binom{n-4}{k-2}}_{(*)} + \underbrace{\binom{n-4}{k-2}}_{(\Delta)} +$$

$$\underbrace{\binom{n-4}{k-2}}_{(\square)} + \underbrace{\binom{n-4}{k-2}}_{1} + \underbrace{\binom{n-4}{k-2}}_{2} + \underbrace{\binom{n-4}{k-2}}_{3} + \underbrace{\binom{n-4}{k-1}}_{1} + \underbrace{\binom{n-4}{k-1}}_{2} + \underbrace{\binom{n-4}{k-1}}_{3} +$$

$$\underbrace{\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}}_{\mathrm{II}} =$$

(operamos os nºs binomiais com os símbolos correspondentes, pela relação de Stiefel apresentada na Q2-(a))

$$\underbrace{\binom{n-3}{k-3}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\binom{n-3}{k-2}}_{(*)} + \underbrace{\binom{n-3}{k-2}}_{(\Delta)} + \underbrace{\binom{n-3}{k-2}}_{(\square)} + \underbrace{\binom{n-3}{k-1}}_{1} + \underbrace{\binom{n-3}{k-1}}_{2} + \underbrace{\binom{n-3}{k-1}}_{3} + \underbrace{\binom{n-3}{k}}_{\mathrm{II}} =$$

(vamos indicando as operações feitas colocando os dois símbolos ~~agora~~ dos números binomiais usados ~~agora~~ ~~na~~ na relação de Stiefel agora)

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular: Matemática

Nº 19129

$$\underbrace{\underset{(\mathrm{I})\,(*)}{\binom{n-2}{k-2}} + \underset{(\Delta)\,(1)}{\binom{n-2}{k-1}}} + \underbrace{\underset{(\square)\,(2)}{\binom{n-2}{k-1}} + \underset{(3)\,(\mathrm{II})}{\binom{n-2}{k}}} =$$

agora não precisamos mais dos símbolos

$$\underbrace{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

$$\binom{n}{k}$$ o lado esquerdo da equação. Como queríamos. $\square$

Q2. (a) ~~...~~ e ~~...~~

1º Problema de contagem:

Temos 4 bolas de cores diferentes. Quantos ~~...~~ agrupamentos de 3 bolas ~~diferentes~~ podemos fazer?

resolvendo pelo lado esquerdo:

2º $C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$

resolvendo pelo lado direito:

3º Podemos separar uma bola e fazer o agrupamento de 2 a 2 com as 3 ~~...~~ que sobraram.

~~...~~ $_2$

Folha 8

Com as 3 que sobraram, agrupando de 2 em 2, temos:

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3 \text{ grupos.}$$

Mas qual é a cor da que ficou sozinha?