UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	MARCOS MONTE DE OLIVEIRA ALVES
Frase	"Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire

Nº Identificador: 19169

"Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire

1. $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 3000\}$; $B \subset A$ tal que $x \in B \Rightarrow 2x \notin B$

Claramente é possível agrupar todos os números ímpares (1500 no caso em questão) no conjunto B. Contudo, pela restrição própria para a formação de B, o mesmo não ocorre com os números pares. Na verdade, se iniciarmos alocando a maior quantidade possível de pares e, iniciando pelo par 2, apenas serão agrupados os números da forma $4k+2$, já os da forma $4k$ $(= 2 \cdot 2k)$ deveriam ser desconsiderados; com $k \in \mathbb{N}$. Note agora, que ao tomar os números da forma $4k+2$, todos os ímpares até 1499 devem ser automaticamente descartados. Logo, a forma ideal de iniciar a escolha dos elementos de B, a fim de maximizar a quantidade de elementos, é selecionar todos os números da forma $2n+1$ primeiro, com $n \in \mathbb{N}$. Esta contagem totaliza, em seu início, 1.500 elementos $(=3000/2)$.

Análise dos Pares:

Ao tomar os números da forma $2n+1$, com $n \in \mathbb{N}$, todos os números da forma $2 \cdot (2n+1) = 4n+2$ devem ser excluídos. Restam, portanto, os pares da forma $4n$.

Seja $C = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots, 3000\}$ o conjunto que contém os pares da forma $4n$. Podemos retirar os números da forma $8n$, restando, deste modo, os números da forma ~~(4n)~~ "sem efeito" $4(2n+1)$

Logo, há $\frac{1500}{4} = 375$ números pares, da forma $4(2n+1)$, a serem incluídos em B.

Cardinalidade máxima de $B = 1500 + 375 = 1875$.

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular MATEMÁTICA	Nº 19169

1. Notação alternativa para $\binom{n}{k} \div C_n^k$

a) De quantos modos distintos podemos selecionar k pessoas de um grupo com n pessoas?

1ª solução:

Esta é a definição de combinação de n elementos tomados k a k. Daí segue imediato que o número de maneiras é dado por C_n^k. (I)

2ª solução!

Alternativamente podemos fazer a contagem excluindo uma das pessoas do grupo e, a seguir, contando as seleções que contém a pessoa excluída. Veja:

C_{n-1}^{k-1} é o número de formas de selecionar k-1 pessoas de um grupo com n-1 pessoas. Nesta contagem, é como se a pessoa "A" fizesse parte da seleção obrigatoriamente.

C_{n-1}^{k} é a quantidade de grupos sem a pessoa A

Daí segue que o total de formas é: $\cancel{\left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n}^{k-1}\right)}$ "sem efeito"

$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$ (II)

À vista disso, temos que $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$ (I = II) ∎

b) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \left(C_{n-2}^{k-2} + C_{n-2}^{k-1}\right) + \left(C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k}\right) = C_{n-2}^{k-2} + 2 \cdot C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k} =$

$= \left(C_{n-3}^{k-3} + C_{n-3}^{k-2}\right) + 2\left(C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-1}\right) + \left(C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^{k}\right) =$

$\left(C_{n-4}^{k-4} + C_{n-4}^{k-3} + C_{n-4}^{k-3} + C_{n-4}^{k-2}\right) + 2 \cdot \left(C_{n-4}^{k-3} + C_{n-4}^{k-2} + C_{n-4}^{k-2} + C_{n-4}^{k-1}\right) + C_{n-4}^{k-2} + C_{n-4}^{k-1} + C_{n-4}^{k-1} + C_{n-4}^{k} =$

$= C_{n-4}^{k-4} + 4C_{n-4}^{k-3} + 6C_{n-4}^{k-2} + 4C_{n-4}^{k-1} + C_{n-4}^{k}$ C.Q.D.

Setor Curricular
MATEMÁTICA

Nº 19 169

:) Passo 1: Vamos contar a quantidade de grupos ~~com~~ 4 pessoas (A, B, C e D, digamos) dentre as n.

$$x_1 = C_{n-4}^{k-4}$$

Passo 2: Vamos escolher k−3 pessoas das n−4 e, a seguir, escolher 3 das 4 "~~retiradas~~ sem efeito" inicialmente apontadas

$$x_2 = C_{n-4}^{k-3} \cdot C_4^3 = 4 \cdot C_{n-4}^{k-3}$$

Passo 3: Escolhemos k−2 das n−4 e, a seguir, 2 pessoas das 4.

$$x_3 = C_{n-4}^{k-2} \cdot C_4^2 = 6 \cdot C_{n-4}^{k-2}$$

Passo 4: Escolhemos k−1 das n−4 e, a seguir, 1 pessoas das 4.

$$x_4 = C_{n-4}^{k-1} \cdot C_4^1 = 4 \cdot C_{n-4}^{k-1}$$

Passo 5: Escolhemos k das n−4 e 0 das 4 pessoas

$$x_5 = C_{n-4}^{k} \cdot C_4^0 = C_{n-4}^{k}$$

$$T = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$T = C_{n-4}^{k-4} + 4 \cdot C_{n-4}^{k-3} + 6 C_{n-4}^{k-2} + 4 C_{n-4}^{k-1} + C_{n-4}^{k}$$

3. 1ª solução: Aplicando o teorema de L'Hôpital ($\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ para $\frac{f(x)}{g(x)}$, em particular, da forma $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \quad \text{C.Q.D.}$$

3. 2ª solução: Teorema do confronto

$\lim_{x\to a} f(x) = L$; $\lim_{x\to a} g(x) = M$ $\lim_{x\to a} h(x) = L$

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, vale que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$

Note que $\operatorname{sen} x \leq x$. É fácil perceber, já que $f'(\operatorname{sen} x) = \cos x$ e em $x=0$ $f'(\operatorname{sen} x) = 1$, logo a reta $y = 1.x$ é tangente ao gráfico de $\operatorname{sen} x$ em $(0,0)$

Além disso, se $x \in Q_I$ (primeiro quadrante) $\operatorname{sen} x \leq Tg x$, já que $Tg x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e $0 \leq \cos x \leq 1$. De forma análoga temos que $x \leq Tg x$

Portanto, vale que:

"(sem efeito $\cancel{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}$)"

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq Tg x \quad (\div \operatorname{sen} x, \text{ pois } \operatorname{sen} x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x . \operatorname{sen} x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

Mas $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$. Daí segue que:

$$\lim_{x\to 0} 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \leq 1$$

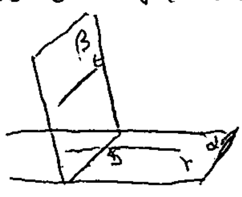
E, portanto, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

4.

a) (F) Podem ser reversas

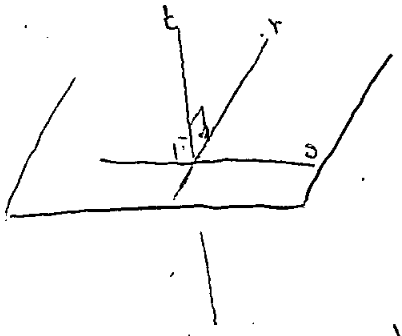
b) (F) Podem ser reversas

c) (F) r e s podem estar contidas em um plano α enquanto que t e s estejam em um plano β, secante a α em s



4. d) (V)

e) (F) Podem ser reversas ou concorrentes



~~f) (V) Obs: neste caso, estamos considerando que dois planos coincidentes se intersectam. Caso contrário, este seria um contra-exemplo.~~

~~g) (F) Novamente, considerando planos coincidentes como concorrentes, se $\alpha \equiv \beta$, então α é paralelo à β.~~ "sem efeito"

~~h)~~

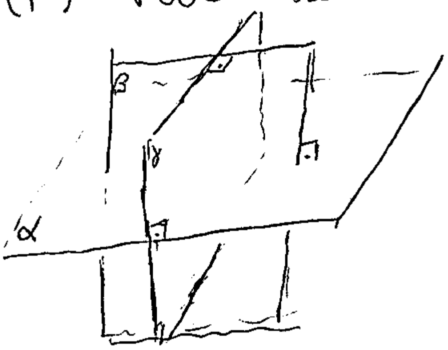
f) (V) Planos distintos → Enunciado

g) (V) Planos distintos → Enunciado

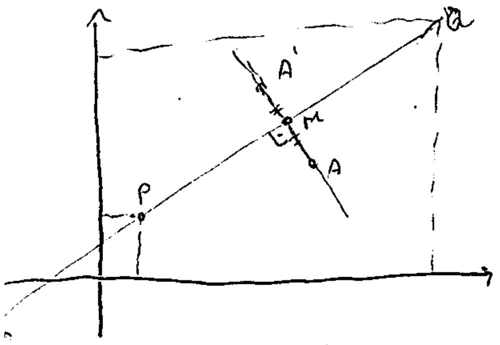
h) (V) Do enunciado os planos são distintos

i) (V)

j) (F) Podem ser concorrentes



1. 1ª Solução:



$r: y = ax + b$, com $a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ e $b = \frac{y_P x_Q - y_Q x_P}{x_Q - x_P}$

Seja A' o simétrico de A em relação à reta r, definida por ~~PQ~~ e s a reta definida pelos pontos A e A'. Ora, como $r \perp s$, temos que $m_r \cdot m_s = -1$ onde m_r e m_s são, respectivamente, os coeficientes angulares das retas r e s.

$a \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = \frac{-1}{a} = \frac{x_P - x_Q}{y_Q - y_P}$

Equação de s: $y = -\frac{1}{a}x + h$. Como $A \in s$, temos que:

$y_A = \frac{-x_A}{a} + h \therefore h = \frac{a \cdot y_A + x_A}{a} = y_A + \frac{x_A(x_Q - x_P)}{y_Q - y_P}$

Daí $s: y = \frac{-1}{a}x + h$ está bem definida.

Note agora que $r \cap s = M$

$a x_M + b = \frac{-x_M}{a} + h \Rightarrow \frac{x_M(a^2+1)}{a} = h - b \therefore x_M = \frac{a(h-b)}{a^2+1}$

$y_M = -\frac{x_M}{a} + h$

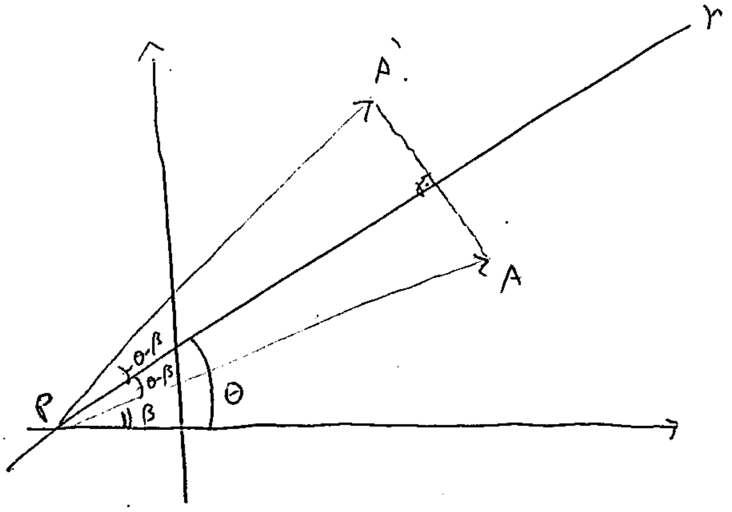
Mas M pertence à mediatriz de AA' e, portanto, $M = \frac{A + A'}{2}$, ou ainda

$A' = 2M - A$

$x_{A'} = 2 \cdot \frac{a(h-b)}{a^2+1} - x_A = 2 \cdot \frac{\left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right) \cdot \left[\left(y_A + \frac{x_A(x_Q - x_P)}{y_Q - y_P}\right) - b\right]}{\left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right)^2 + 1} - x_A$

$y_{A'} = 2 \cdot \left(\frac{-x_M}{a}\right) + h$

5. 2ª solução:



Devemos rotacionar o vetor $\vec{PA}$ do ângulo $2(\theta-\beta)$, indicado na figura ao lado.

$T(x_A, y_A) = (x_A \cos 2(\theta-\beta) - y_A \operatorname{sen} 2.(\theta-\beta), x_A \operatorname{sen} 2(\theta-\beta) + y_A \cos$

Cálculo de $\cos 2(\theta-\beta)$ e $\operatorname{sen} 2(\theta-\beta)$

• $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ e $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

$$Tg\,\theta = \frac{y_a - y_p}{x_\theta - x_p} \qquad Tg(\beta) = \frac{y_A}{x_A - x_P}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{1+Tg^2\theta}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{Tg^2\theta}{1+Tg^2\theta}}$$

• $\cos 2(\theta-\beta) = \cos 2\theta \cos 2\beta - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 2\beta$

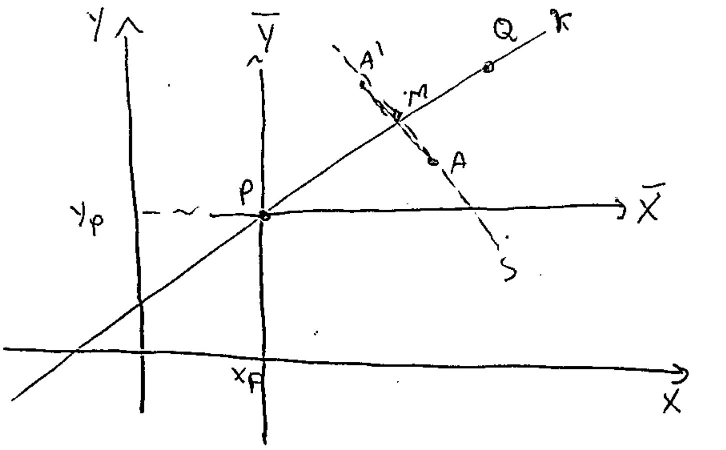
• $\operatorname{sen} 2(\theta-\beta) = 2.\operatorname{sen}(\theta-\beta)\cos(\theta-\beta)$

"em efeito"
~~Logo A'~~

Logo $x_{A'} = x_A \cos(2\theta - 2\beta) - y_A \operatorname{sen}(2\theta - 2\beta)$ e $y_{A'} = x_A \operatorname{sen}(2\theta - 2\beta) + y_A \cos(2\theta - 2\beta)$

estão bem definidos

5. 3ª solução



Considere a translação de eixos $XY \Rightarrow \bar{X}\bar{Y}$, onde $\bar{x} = x - x_P$ ou $x = \bar{x} + x_P$ e $\bar{y} = y - y_P$ ou $y = \bar{y} + y_P$

Em $\bar{X}O\bar{Y}$ temos:

$$r: y = \frac{\bar{y}_Q}{\bar{x}_Q}\bar{x}$$

$$s: y = -\frac{\bar{x}_Q}{\bar{y}_Q}\bar{x} + b.$$

Como $A \in s$, vale que: $\bar{y}_A = \frac{-\bar{x}_Q}{\bar{y}_Q}\bar{x}_A + b \therefore b = \bar{y}_A + \frac{\bar{x}_Q\bar{x}_A}{\bar{y}_Q}$ e $s: y = \frac{-\bar{x}_Q}{\bar{y}_Q}x + \bar{y}_A + \frac{\bar{x}_Q\bar{x}_A}{\bar{y}_Q}$

Seja $M = r \perp s$

$$\frac{\bar{y}_Q}{\bar{x}_Q}\bar{x}_M = \frac{-\bar{x}_Q}{\bar{y}_Q}\bar{x}_M + y_A + \frac{\bar{x}_Q\bar{x}_A}{\bar{y}_Q} \therefore \bar{x}_M\left(\frac{\bar{y}_Q^2 + \bar{x}_Q^2}{\bar{x}_Q\cancel{\bar{y}_Q}}\right) = \frac{\bar{y}_A\bar{y}_Q + \bar{x}_A\bar{x}_Q}{\cancel{\bar{y}_Q}}$$

$$x_M = \frac{\bar{x}_Q(\bar{y}_A\bar{y}_Q + \bar{x}_A\bar{x}_Q)}{\bar{x}_Q^2 + \bar{y}_Q^2} \quad \text{e} \quad \frac{A + A'}{2} = M, \text{ então } A' = 2M - A$$

$$\text{Daí } \bar{x}_{A'} = \frac{2\bar{x}_Q\bar{y}_A\bar{y}_Q + 2\bar{x}_A\bar{x}_Q^2}{\bar{x}_Q^2 + \bar{y}_Q^2} - \bar{x}_A = \frac{2\bar{x}_Q\bar{y}_A\bar{y}_Q + \bar{x}_A\bar{x}_Q^2 - \bar{x}_A\bar{y}_Q^2}{\bar{x}_Q^2 + \bar{y}_Q^2}$$

E nas coordenadas XOY temos $x_{A'} = \bar{x}_{A'} + x_P$.

Daí segue que $x_A = \frac{2x_Q y_A y_Q + x_A x_Q^2 - x_A y_Q}{x_Q^2 + y_Q^2} + x_P$

Raciocinando de modo análogo, chegamos ao valor de $y_{A'}$ no sistema XOY.