UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	JOÃO CARLOS CALDATO CORREIA
Frase	"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda." Paulo Freire
Reescreva a frase	Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda". Paulo Freire.

Nº Identificador: 19208

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19208

"Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda". Paulo Freire.

~~1)~~

~~Se $x = 1 \Rightarrow A = \{1\}$. Logo, $B = \emptyset$ ou $B = \{1\}$.~~

~~Se $x = 5 \Rightarrow A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, logo~~ ~~Sem efeito~~

~~Consideremos $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3000\}$.~~

~~Como $B \subset A$, e podemos escrever $B = \{y \in A \mid y < 2x\}$~~

~~1)~~ ~~Sem efeito~~

~~Consideremos $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 3000\}$ e~~

~~$B \subset A$, tal que $B = \{y \in A \mid y <$~~ (Sem efeito)

1) Considere $A = \{x \in N^* \mid x \leq 3000\}$ e $B \subset A$.

Como $B \subset A$, e dadas as condições do enunciado, (que se $x \in B \Rightarrow 2x \notin B$), pode ocorrer de $x = 3000$, uma vez que ~~que~~ $3000 \in A$. Sendo assim, teríamos por hipótese, $2.3000 = 6000 \notin B$. Mas, note que 6000 também não pertence a A. Deste modo, poderíamos tomar $B = A$, uma vez que $A \subset A$, implicando que a cardinalidade máxima que B poderia assumir seria igual a 3000.

4) a) ~~Falsa, r e s podem estar em planos distintos no espaço. Alguns autores chamam de~~ retas ~~reversas~~

b) ~~Falsa, r e s podem estar em planos distintos e não se intersectarem.~~

~~c) Falsa, r e s (sem efeito)~~

~~c) Falsa. Suponha que (sem efeito)~~

~~4) Falsa. Suponha que $r \in \alpha$ e $s \in \beta$.~~ Como ~~Elas estão em planos distintos no espaço, podem~~ (sem efeito)

4) a) ~~Falsa. Suponha que $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Como r e s estão em planos distintos, pode ocorrer de não existir nenhum plano γ no espaço que as contenha simultaneamente. Alguns autores as denominam como retas reversas.~~ (sem efeito)

b) ~~Falsa. Suponha que $r \in \alpha$ e $s \in \beta$, tal que $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Logo, r e s nunca se intersectarão.~~

~~c) Falsa. Suponha que $r \in \alpha$, $s \in \beta$ e $r, t \in$~~ (sem efeito)

~~c) Falsa. Suponha que $r, s \in \alpha$, $s, t \in \beta$, com $s \parallel t$ e $\alpha \cap \beta =$~~ (
~~Apesar de haver intersecção entre as retas r e s,~~
~~como r e t estão em planos distintos~~
~~e que não possui intersecção~~ (sem efeito)

obs: o início está na página 9

4) c) Falso. Suponha que $r, s \in \alpha$, $s, t \in \beta$, com $\alpha \cap \beta = \{s\}$. Como r e t estão em planos distintos, cuja interseção é apenas a reta s, não é possível r cortar t.

d) Verdadeira.

e) Falso. Suponha $r, t \in \alpha$ e $s, t \in \beta$, com $\alpha \cap \beta = \{t\}$. Como r e s estão em planos diferentes, pode ocorrer de α e β serem perpendiculares, por exemplo. Logo, as retas r e s seriam reversas e não existiria nenhum plano que as contém simultaneamente.

f) Verdadeira.

g) Verdadeira.

h) Verdadeira.

i) Verdadeira.

j) Falso. Pois α e γ podem ser perpendiculares, β e γ também, mas não necessariamente α e β serão paralelos, pois pode ocorrer interseção entre eles, uma vez que o produto dos vetores normais a eles não necessariamente é zero.

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular: Matemática	Nº 19208

b) Caso 1 $x_Q \neq x_P$ e $y_Q \neq y_P$

Dados os pontos $P=(x_P, y_P)$ e $Q=(x_Q, y_Q)$, podemos determinar a equação reduzida da reta que passa por P e Q, dada, por exemplo, pela equação:

$$y = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{coeficiente angular}}}{m}x + n \longrightarrow \text{coeficiente linear}, \text{ onde } m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}, \text{ para } x_Q \neq x_P$$

Logo, $y = \left(\dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right)x + n$. Para determinar n vamos substituir o ponto, por exemplo, $P=(x_P, y_P)$ na equação. Assim,

$$y_P = \left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right) \cdot x_P + n \Rightarrow n = y_P - \left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right)x_P$$

Deste modo, a equação reduzida da reta que passa por P e Q, a qual denotamos aqui por PQ, é dada por

$$y = \left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right) \cdot x + \left(y_P - \left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right)x_P\right)$$

ou seja, $y = \left(\dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right)(x - x_P) + y_P$

Folha 4

Setor Curricular ~~Matemática~~

Nº 19208

Como queremos determinar o ponto A', que é simétrico de A, em relação à reta PQ, podemos encontrar a equação reduzida da reta AA', perpendicular a PQ.

Para isso, considere a reta AA' dada por

$y = m'x + n'$, em que $m' \cdot m = -1$. Logo

$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}} = -\left(\frac{x_Q - x_P}{y_Q - y_P}\right), \text{ para } y_Q \neq y_P.$$

Deste modo, para determinar n', vamos substituir o ponto $A = (x_A, y_A)$, na equação $y = m'x + n'$, concluindo que, a reta AA' é dada por

$$y = -\left(\frac{x_Q - x_P}{y_Q - y_P}\right)(x - x_A) + y_A$$

Para concluir o exercício, tendo as equações reduzidas das retas PQ e AA', basta determinar as coordenadas do ponto A'. Para isso, encontraremos o ponto de interseção das duas retas, denotado por $M = (x_M, y_M)$.

$$\left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right) \cdot (x - x_P) + y_P = -\left(\frac{x_Q - x_P}{y_Q - y_P}\right)(x - x_A) + y_A$$

Desenvolvendo a expressão anterior, a fim de determinar a abscissa x_M, encontraremos:

$$x_M = \frac{m(y_A - y_P + m x_P) + x_A}{(1+m^2)}, \text{ onde } m = \left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right).$$

Logo, para determinar y_M, podemos substituir x_M em qualquer uma das equações reduzidas anteriores.

Logo, $y_M = \left(\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}\right)(x_M - x_P) + y_P$.

Portanto, como M é o ponto ~~méd~~ da interseção entre as retas PQ e AA' e está a uma distância d do ponto A, e queremos determinar o ponto A' que também está a uma distância d de M, basta tomá-lo como ponto médio, ou seja, " $\frac{A + A'}{2} = M$", isto é, $A' = 2M - A$". Em coordenadas, ~~$(x_{A'}, y_{A'}) =$~~ temos que, ~~e~~ $A' = (x_{A'}, y_{A'})$ é dado por

$$x_{A'} = 2 \cdot x_M - x_A$$

$$y_{A'} = 2 \cdot y_M - y_A$$

Sendo assim,

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular: Matemática

Nº 19208

Legenda: $+y_P$

$$x_{A'} = 2\left[\frac{m(y_A - y_P + m x_Q) + x_A}{(1+m^2)}\right] - x_A$$

e $$y_{A'} = 2\left[m\left(\frac{m(y_A - y_P + m x_Q) + x_A}{(1+m^2)} - x_P\right) + y_P\right] - y_A,$$

onde $m = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$, ou seja, o coeficiente angular da reta PQ

Caso 2

Para o caso em que $x_P = x_Q$, basta tomar A' como sendo $A' = (2x_P - x_A, y_A)$, onde $(x_A, y_A) = A$.

Caso 3

Para o caso em que $y_P = y_Q$, basta tomar A' como sendo $A' = (x_A, 2y_P - y_A)$, onde $(x_A, y_A) = A$.

$$\cancel{x_{A'} = 2.\left[\frac{m(y_A - y_P + m x_P) + x_A}{(1+m^2)}\right] - x_A}$$

$$\cancel{y_{A'} = 2.\left[m.\left(\frac{m(y_A - y_P + m x_P) + x_A}{(1+m^2)}\right)\right.}$$

Sem efeito

---

3) Como o $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ gera uma indeterminação, pois $\frac{\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x}{\lim\limits_{x\to 0} x} = \frac{“0”}{“0”}$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital. Uma vez que $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$ e $x' = 1$ (considere ' o símbolo de derivada), podemos reescrever o limite acima como

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \cos(x)$. Como $\cos(0) = 1$,

e o $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cos(x) = 1$, o limite

$\lim\limits_{x\to 0} \cos(x)$ existe e é igual a 1.

Obs! Nesta questão assumi que o teorema mencionado é verdadeiro

4) Continuação

a) Falso. Suponha que $r \in \alpha$ e $s \in \beta$. Como r e s estão em planos distintos, pode ocorrer de não existir nenhum plano γ no espaço que contenha simultaneamente duas retas.

b) Falso. Suponha que $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ tal que $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Logo, r e s nunca se ~~in~~ encontraram.

---

2) a) A relação dada no item (a) é chamada de relação de Stifel, que provém do Teorema Binomial (Binômio de Newton) que diz:

A expansão ou o desenvolvimento da expressão $(x+a)^n$, em que $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, é dada por

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot a^2 + \dots + \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot a^k + \dots + \binom{n}{n-1} x^1 \cdot a^{n-1} + \binom{n}{n} a^n,$$

em que $k \leq n$.

Os coeficientes desta expansão são chamados números binomiais. Eles dão origem ao triângulo de Pascal, que representamos a seguir, em que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\begin{matrix}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 & & \vdots \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \cdots & \binom{n}{k} & \cdots & \binom{n}{n}
\end{matrix}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{matrix}
0 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\vdots
\end{matrix}$$

1) A relação de Stifel, interpretada neste triângulo, nos diz que, para $n \geq 2$, ou seja, a partir da segunda linha, a soma dos dois elementos acima é igual ao ~~termo~~ termo imediatamente abaixo. De fato, pois, por exemplo,

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2}.$$

Para provar esta relação, utilizaremos o triângulo de Pascal e argumentos combinatórios.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

2a) Sabemos que $\binom{n}{k}$ é o número binomial que está na linha n e na coluna k do triângulo de Pascal e que, pode ser ~~expresso como~~ calculado como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

↳ Definição de combinação.

3ª) Por outro lado, sabemos também que é possível identificar o nº binomial $\binom{n}{k}$ a partir da soma dos dois elementos acima, dado por $\binom{n-1}{k-1} + \binom{k-1}{k}$.
Mostremos a igualdade entre ambos, a partir da definição de combinação.

$$\binom{n-1}{k'-1} + \binom{n-1}{k'} = \frac{(n-1)!}{(k'-1)!\,(n-1-(k'-1))!} + \frac{(n-1)!}{(k')!\,(n-1-k')!}$$

$$= (n-1)!\left(\frac{1}{(k'-1)!\,(n-k')!} + \frac{1}{k'!\,(n-k'-1)!}\right) = (n-1)!\left(\frac{n-k'+k}{(k'-1)!\,(n-k'-1)!}\right)$$

mmc $= (k'-1)!\,(n-k'-1)!$

$$= (n-1)!\left(\frac{n}{((k'-1))!\,(n-(k'-1))!}\right) = \frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

por definição

utilizando uma troca de variável $k'-1 = k$.

b)

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19208

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1))} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \qquad (n-1)!\left(\frac{1}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{1}{k!\,(n-1-k)!}\right)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\frac{k!\,(n-k)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}$$

$$k!\,(n-k)!$$

$$(n-k)+k$$

$$n$$

$$n!$$

$$\frac{n-k+k}{(k-1)!\,(n-k-1)!} = n$$

Sem efeito