UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	ALLANA STHEL SANTOS DE OLIVEIRA
Frase	"Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação-reflexão." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na ação - reflexão." Paulo Freire

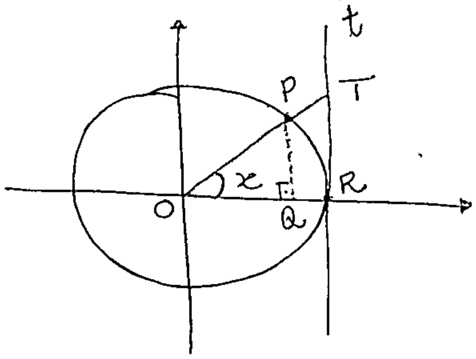
Nº Identificador 19224

Setor Curricular
Matemática

Nº 19224

Questão 3:

Considere P um ponto no círculo trigonométrico com ângulo correspondente $x > 0$ e pequeno. Sejam ainda t a reta tangente ao círculo ~~no~~ trigonométrico na sua origem e os pontos marcados na figura abaixo.



$x > 0$ e pequeno

Da figura temos que

1) área do triângulo POQ é $\frac{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}{2}$

2) área do setor $\widehat{POQ}$ é $\frac{x}{2}$

3) área do triângulo TOQ $= \frac{\operatorname{tg} x}{2}$

Assim, ainda observando a figura, obtemos que

$$\frac{\cos x \operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

donde

$$\cos x \operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

daí e ~~[illegible]~~ notando que $\operatorname{sen} x > 0$ pois $0 < x < \pi/2$ temos que

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19224

que é equivalente a ~~cos~~.

$\left(\cancel{\frac{1}{\cos x}} \cancel{<} \cancel{x} \right)$ sem efeito

(*) $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$, pois $\cos x > 0$ quando $0 < x < \pi/2$.

Temos que $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$, então usando o teorema do confronto podemos afirmar que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Como $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ é uma função par, vale que $\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Logo, $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. ∎

Folha 02

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular	Nº 19224

Questão 4:

(a) Falsa.

Justificativa: as retas $r: \begin{cases} x = 1+a \\ y = 1+2a \\ z = 1 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$ e $s: \begin{cases} x = 1 + b \\ y = b \\ z = b \end{cases}, b \in \mathbb{R}$

não se cortam e não são paralelas. De fato, r e s não ~~são~~ se cortam pois o sistema

$$\begin{cases} 1 + a = 1 + b \\ 1 + 2a = b \\ 1 = b \end{cases}$$ não tem solução e r e s

não são paralelas pois seus vetores direção ($v = (1,2,0)$ e $w = (1,1,1)$ respectivamente) são são paralelos.

(b) Falsa.

Justificativa: a afirmação (b) é contra-positiva da afirmação (a) que é falsa. Assim (b) também é falsa.

Podemos então usar as mesmas retas reversas r e s da justificativa de (a) como contra-exemplo.

(c) Falsa.

Justificativa: considere as retas $r: \begin{cases} x = 1+a \\ y = 1+2a \\ z = 1 \end{cases}, a \in \mathbb{R},$

$s = \begin{cases} x = 1+c \\ y = 1+c \\ z = 1+c \end{cases}, c \in \mathbb{R}$ e $t = \begin{cases} x = 1+b \\ y = 0 \\ z = b \end{cases}, b \in \mathbb{R}.$

Folha 03

Estas retas satisfazem as hipóteses da afirmação. De fato, $r \cap s = \{(1,1,1)\}$ e ou seja, ~~donde~~ r e s se cortam em $(1,1,1)$. E também s e t são paralelas (e distintas) com vetor diretor $v = (1,1,1)$.

Mas não é verdade que r corta t, pois como vimos em (a) estas retas são reversas.

(d) Verdadeira.

(e) Falsa.

Justificativa: considere as retas distintas $r: \begin{cases} x = a \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R},$

$s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = b \end{cases}, b \in \mathbb{R}$ e $t: \begin{cases} x = 0 \\ y = c \\ z = 0 \end{cases}, c \in \mathbb{R}.$

Claramente r é perpendicular a t e s também é perpendicular a t, logo as hipóteses da afirmação estão satisfeitas, porém não é verdade que r e s são paralelas, pois seus vetores direção ~~são~~ não são paralelos.

(f) Verdadeiro.

(g) Verdadeiro

h) Verdadeiro

i) Verdadeiro

j) Falso.

Justificativa: basta considerar os planos coordenados. $\alpha: x=0$, $\beta: y=0$ e $\gamma: z=0$. Claramente α é perpendicular a γ e β também é perpendicular a γ porém, γ e β não são paralelos.

<u>Questão 2</u>:

(a) Sabemos que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

(b) Vamos usar a fórmula de (a) nos números ~~termos~~ $\binom{n-1}{k-1}$ e $\binom{n-1}{k}$

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} \quad \text{e} \quad \binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}.$$

Usando a identidade novamente temos,

$$\binom{n-2}{k-2} = \binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2}, \quad \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1}$$

$$\binom{n-2}{k} = \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

$$\binom{n-3}{k-3} = \binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3} \quad , \quad \binom{n-3}{k-2} = \binom{n-4}{k-3} + \binom{n-4}{k-2}$$

$$\binom{n-3}{k-1} = \binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1} \quad e \quad \binom{n-3}{k} = \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$$

Assim, temos que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$

$$= \binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2} + 2\binom{n-3}{k-2} + 2\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

$$= \binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{n-2} + 3\binom{n-4}{k-2} + 3\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$$

$$= \binom{n-k}{k-k} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$$

Questão 1:

O conjunto de cardinalidade máxima será aquele formado por todos os números ímpares união $\{2\}$. Ou seja, o valor máximo que a cardinalidade de B pode assumir é $1.500 + 1 = 1501$.

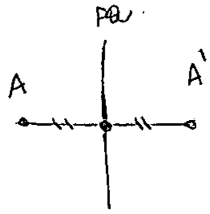
Questão 5:

Um vetor direção para a reta PQ é $\vec{v} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P)$ e temos que $\vec{w} = (y_Q - y_P, x_P - x_Q)$ é ortogonal a $\vec{v}$.

Uma equação para a reta PQ é $PQ: \begin{cases} x = x_P + (x_Q - x_P)t \\ y = y_P + (y_Q - y_P)t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

e uma equação para a reta AA' é

$$AA' = \begin{cases} x = x_A + (y_Q - y_P)s \\ y = y_A + (x_P - x_Q)s \end{cases}$$



A interseção entre essas duas retas é dada pelo sistema:

$$\begin{cases} x_P + (x_Q - x_P)t = x_A + (y_Q - y_P)s \\ y_P + (y_Q - y_P)t = y_A + (x_P - x_Q)s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_Q - x_P)t - (y_Q - y_P)s = x_A - x_P \\ (y_Q - y_P)\cancel{t} - (x_P - x_Q)s = y_A - y_P \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y_Q - y_P)(x_Q - x_P)\cancel{t} - (y_Q - y_P)(y_Q - y_P)s = (x_A - x_P)(y_Q - y_P) \\ (x_P - x_Q)(y_Q - y_P)t - (x_P - x_Q)(x_P - x_Q)s = (y_A - y_P)(x_P - y_Q) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[-(y_Q - y_P)^2 - (x_P - x_Q)^2\right]s = (x_A - y_P)(x_P - y_Q)$$