UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

## PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

| | |
|---|---|
| Setor | MATEMÁTICA |
| Candidato | ALINE DE MENDONÇA BRASILINO |
| Frase | "Não há saber mais ou saber menos: Há saberes diferentes." Paulo Freire |
| Reescreva a frase | "Não há saber mais ou saber menos: Há saberes diferentes." Paulo Freire |

Nº Identificador 19226

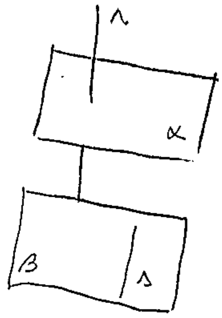
1) Seja B subconjunto do conjunto $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 3000\}$ tal que $x \in B$ implica em $2x \notin B$.

Seja $x = 1$ o menor elemento de B, logo $2x = 2 \cdot 1 = 2$ não pertence a B. Assim, os elementos de B são tais que $2x - 1$. "sem efeito" logo, o subconjunto B é formado pelo conjunto dos números ímpares menores do que 3000.

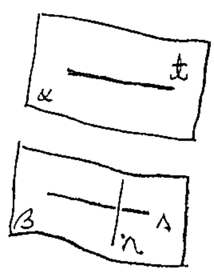
$$B = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 2997, 2999\} \leftarrow \text{maior subconjunto de } B$$

Portanto, o valor máximo que a cardinalidade de B pode assumir é 1500.

4) a) Falsa. Suponha os planos $\alpha$ e $\beta$ paralelos, a reta $r$ cortando o plano $\alpha$ e a reta $s$ pertencente ao plano $\beta$, como ilustra o desenho ao lado. Essas retas não se cortam e não são paralelas.



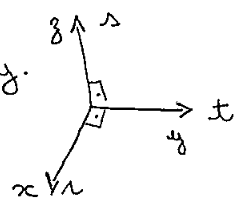

b) Falsa. Como visto no item anterior as retas r e s não são paralelas e não se interseptam.



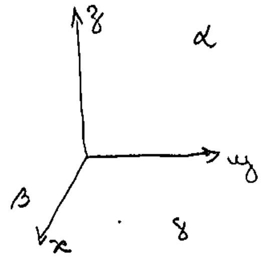

c) Falsa. Suponha os planos $\alpha$ e $\beta$ paralelos, a reta t pertence ao plano $\alpha$, as retas r e s pertencem ao plano $\beta$. Como vemos no desenho ao lado, $s \parallel t$, r corta s, mas r não corta t.

d) Verdadeira.

e) Falsa. Suponha o plano ~~xyz~~ $\mathbb{R}^3$ "sem efeito", seja $s = z$, $r = x$ e $t = y$. Podemos observar que $r \perp t$ e que $s \perp t$ e ainda que r e s são concorrentes e não paralelas.




f) Verdadeira.




1) g) Verdadeira

h) Verdadeira

i) Verdadeira

j) Falsa. Seja o $\mathbb{R}^3$, o plano $y \wedge z$ coincide com o plano $\alpha$, o plano $x \wedge z$ coincide com o plano $\beta$ e o plano $x \wedge y$ coincide com $\gamma$.

Como sabemos, $\alpha$ é perpendicular a $\gamma$ e $\beta$ também é perpendicular a $\gamma$, porém $\beta$ e $\alpha$ não são paralelos.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

aplicando L'Hôpital pois $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x$ e $\lim\limits_{x \to 0} x$ vão para zero, temos a indeterminação $0/0$.

Assim o limite Fundamental é:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

2) a) Provar, por argumento combinatório, a seguinte identidade:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)((n-k)-1)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)!\,((n-k)-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,[k+(n-k)]}{k(k-1)!\,(n-k)((n-k)-1)!} = \frac{n(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Como desenvolvendo o lado direito da igualdade obtemos o lado esquerdo, logo a identidade está provada.

(1º) De quantas formas podemos escolher 10 pessoas de um grupo de 30 pessoas? A ordem de escolha não importa.

(2º) Resolução:

$n = 30$ e $k = 10$

$$\binom{30}{10} = \frac{30!}{10!\,(30-10)!} = \boxed{\frac{30!}{10!\,20!}}$$ ← vamos deixar a resposta indicada

(3º) Resolução

$n = 30$ e $k = 10$

$$\binom{29}{9} + \binom{29}{10} = \frac{29!}{9!\,(29-9)!} + \frac{29!}{10!\,(29-10)!} = \frac{29!}{9!\,20!} + \frac{29!}{10!\,19!} = \frac{29!\,(10+20)}{10!\,20!} = \boxed{\frac{30!}{10!\,20!}}$$

Como vimos usando ambos os membros da identidade, obtemos a mesma resposta.

2) b) $\binom{n}{k}=\binom{n-4}{k-4}+4\binom{n-4}{k-3}+6\binom{n-4}{k-2}+4\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k}$.

Como $\binom{n-3}{k-3}=\binom{n-4}{k-4}+\binom{n-4}{k-3} \rightarrow \binom{n-4}{k-4}=\binom{n-3}{k-3}-\binom{n-4}{k-3}$, logo, temos:

$$=\binom{n-3}{k-3}+3\binom{n-4}{k-3}+6\binom{n-4}{k-2}+4\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k}$$

Como $\binom{n-3}{k-2}=\binom{n-4}{k-3}+\binom{n-4}{k-2} \rightarrow \binom{n-4}{k-3}=\binom{n-3}{k-2}-\binom{n-4}{k-2}$, logo, temos:

$$=\binom{n-3}{k-3}+3\binom{n-3}{k-2}-3\binom{n-4}{k-2}+6\binom{n-4}{k-2}+4\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k}$$

Como $\binom{n-3}{k-1}=\binom{n-4}{k-2}+\binom{n-4}{k-1} \rightarrow \binom{n-4}{k-2}=\binom{n-3}{k-1}-\binom{n-4}{k-1}$, logo, temos:

$$=\binom{n-3}{k-3}+3\binom{n-3}{k-2}+3\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k}$$, ~~te~~ "sem efeito"

Como $\binom{n-3}{k}=\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k}$, logo temos

$$=\binom{n-3}{k-3}+3\binom{n-3}{k-2}+3\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k}$$

Como $\binom{n-2}{k-2}=\binom{n-3}{k-3}+\binom{n-3}{k-2} \rightarrow \binom{n-3}{k-3}=\binom{n-2}{k-2}-\binom{n-3}{k-2}$, logo, temos:

$$=\binom{n-2}{k-2}+2\binom{n-3}{k-2}+3\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k}$$

Como $\binom{n-2}{k-1}=\binom{n-3}{k-2}+\binom{n-3}{k-1} \rightarrow$ ~~logo, temos~~: "sem efeito" $\binom{n-3}{k-2}=\binom{n-2}{k-1}-\binom{n-3}{k-1}$, logo, temos

$$=\binom{n-2}{k-2}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k}$$

Como $\binom{n-2}{k}=\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k}$, logo, temos:

$$=\binom{n-2}{k-2}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}$$

Como $\binom{n-1}{k-1}=\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-2}{k-1} \rightarrow \binom{n-2}{k-2}=\binom{n-1}{k-1}-\binom{n-2}{k-1}$, logo,

$$=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}$$

2) b) (continuação)

Como $\binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} \to \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-1}{k} - \binom{n-2}{k}$, logo:

$= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \cancel{+\binom{n-2}{k}}$ ← "sem ~~feito~~ efeito" ↑ = "sem efeito"

Como $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Assim mostramos que:

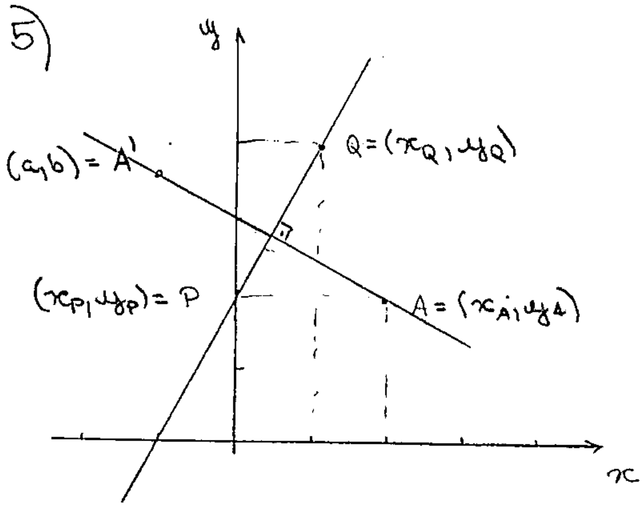
$$\binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}.$$

c) Resolução: $n = 30$ e $K = 10$

$$\binom{26}{6} + 4\binom{26}{7} + 6\binom{26}{8} + 4\binom{26}{9} + \binom{26}{10} =$$

$$= \frac{26!}{6!\,20!} + \frac{4\cdot 26!}{7!\,19!} + \frac{6\cdot 26!}{8!\,18!} + \frac{4\cdot 26!}{9!\,17!} + \frac{26!}{10!\,16!}$$

5)




Sejam $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ os pontos que determinam a reta PQ e $\vec{v} = Q - P$.

Seja $A = (x_A, y_A)$ e $A' = (a, b)$ os pontos que determinam a reta $AA'$ e $\vec{u} = A - A'$.

Como $A'$ é simétrico do ponto A em relação a reta PQ. A reta $AA'$ é perpendicular a reta PQ. Logo, o produto interno de $\vec{u}$ e $\vec{v} = 0$.

$\vec{v} = Q - P = (x_Q, y_Q) - (x_P, y_P) = (x_Q - x_P, y_Q - y_P)$

$\vec{u} = A - A' = (x_A, y_A) - (a, b) = (x_A - a, y_A - b)$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (x_A - a, y_A - b), (x_Q - x_P, y_Q - y_P) \rangle = 0$