UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	SÉRGIO FELIPE ABREU DE BRITTO BASTOS
Frase	"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire.

Nº Identificador 19 227

"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire

Questão 4.

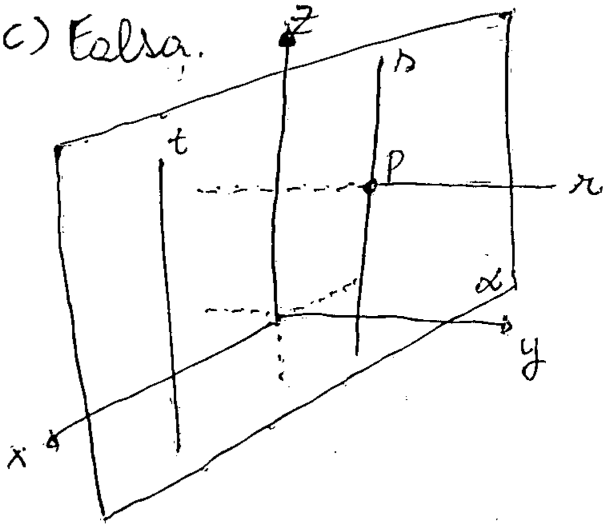
(a) Falsa.

As retas r e s podem ser reversas, ou seja, não se cortam porém não existe um plano que passa por ambas as retas ao mesmo tempo.

(b) Falsa.

As retas r e s podem ser reversas, e portanto, não se intersectam

(c) Falsa.



Na figura ao lado representa a seguinte situação:

O plano α é definido pelas retas paralelas t e s, onde esse plano é paralelo ao plano definido pelos eixos x e z.

A reta r intersecta o plano α e a reta s no ponto P.

Desta forma, a reta r não corta a reta t.

(d) Verdadeira.

(e) Verdadeira.

(f) Verdadeira.

(g) Verdadeira.

(h) Verdadeira.

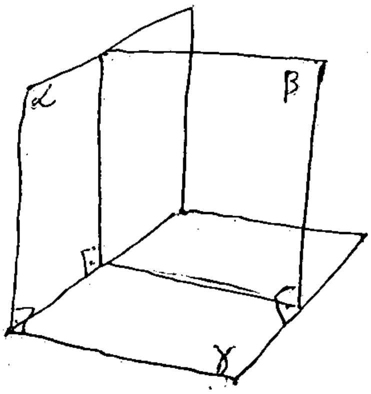
(i) Verdadeira.

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19227

"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire.

Questão 4 (continuação)

(j) Falsa.



Na figura ao lado representa a seguinte situação:

α, β e γ são planos, tais que:

$\alpha \perp \gamma$ (α é perpendicular a γ).

$\beta \perp \gamma$

$\beta \perp \alpha$.

Desta forma, α e β não necessariamente são paralelos, eles podem se interseptar

Questão 3:

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, observe que ao substituir o valor de $x=0$ na razão $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ obtemos a indeterminação $\frac{0}{0}$. Para solucionar esse problema, vamos usar a Regra de L'Hopital (L'H) derivando em relação a x o numerador e o denominador.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \quad e \quad \frac{d}{dx}(x) = 1.$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

A última igualdade é válida pois $\cos 0 = 1$.

"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire

Questão 2

(a) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad \binom{n-1}{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ $\quad \binom{n-1}{k} = \dfrac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$

Queremos mostrar que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

De fato, substituindo as igualdades acima na equação que queremos provar obtemos:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

Vamos provar "a volta", a partir da soma das frações:

$$\frac{(n-1)!}{\underset{/k}{(k-1)!(n-k)!}} + \frac{(n-1)!}{\underset{/n-k}{k!(n-k-1)!}}$$

mmc entre $(k-1)!(n-k)!$, $k!(n-k-1)!$.

$k! = k\cdot(k-1)!$

$(n-k)! = (n-k)\cdot(n-k-1)!$, assim,

$(k-1)!(n-k)!\ ,\ k!(n-k-1)!$	$(k-1)!$
$(n-k)!\ ,\ k\cdot(n-k-1)!$	$(n-k-1)!$
$(n-k)\ ,\ k$	k
$n-k\ ,\ 1$	$n-k$
$1\ ,\ 1$	
	$k!\cdot(n-k)!$

$$= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{k\cancel{(n-1)!} + n(n-1)! - k\cancel{(n-1)!}}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire.

Questão 2) (Continuação)

(b) Queremos mostrar

$$\binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$$

Começaremos pela identidade do item (a) e utilizaremos ela recursivamente.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$= \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$

$$= \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$

$$= \binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2} + 2\cdot\binom{n-3}{k-2} + 2\cdot\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

$$= \binom{n-3}{k-3} + 3\cdot\binom{n-3}{k-2} + 3\cdot\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

$$= \binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3} + 3\cdot\binom{n-4}{k-3} + 3\cdot\binom{n-4}{k-2} + 3\cdot\binom{n-4}{k-2} + 3\cdot\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire

Questão 5) (Continuação)

(e) $$= \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\cdot\binom{n-4}{k-2} + \underbrace{3\cdot\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k-1}} + \binom{n-4}{k}$$

$$= \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\cdot\binom{n-4}{k-2} + 4\cdot\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}.$$

"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire

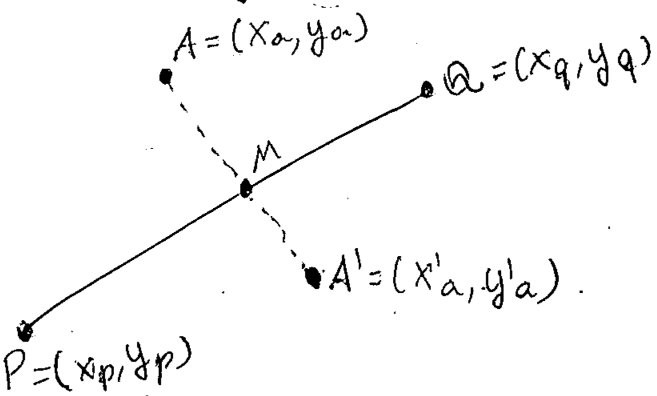
Questão 1) $A = \{x \in \mathbb{N}^* / x \leq 3000\}$.

$B \subset A$, tal que $x \in B$ implica $2x \notin B$.

Note que se $x \in B$ e $x \in \{y \in \mathbb{N}^* / y \leq 1500\}$, $2x \in B$, pois o dobro do valor dos elementos do conjunto B variará de 2 até 3000, pertencendo assim ao conjunto A.

Porém, se limitarmos o conjunto $B = \{x \in \mathbb{N}^* / 1501 \leq x \leq 3000\}$, $2x \notin$ e $2x \notin A$, assim, $\# B = 3000 - 1501 + 1 = 1500$.

Questão 5) Sejam os pontos $P = (x_p, y_p)$, $Q = (x_q, y_q)$ que determinam uma reta PQ. Seja $A = (x_a, y_a)$ não pertencente à reta PQ. Vamos determinar as coordenadas do ponto $A' = (x'_a, y'_a)$ simétrico do ponto A em relação à reta PQ. Veja a ilustração abaixo:



Sendo M o ponto médio entre os pontos A e A' que pertence à reta PQ. As coordenadas de M são

$$M = \left(\frac{x_a + x'_a}{2}, \frac{y_a + y'_a}{2} \right).$$

"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire

Questão 5) (Continuação).

Vamos encontrar a equação da reta que passa por PQ.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x & y & 1 & x & y \\ x_p & y_p & 1 & x_p & y_p \\ x_q & y_q & 1 & x_q & y_q \end{array}\right| \qquad -x_q y_p \quad -x y_q \quad -y x_p \qquad +x \cdot y_p \quad y \cdot x_q \quad x_p \cdot y_q$$

$$x \cdot y_p + y \cdot x_q + x_p y_q - x_q y_p - x y_q - y x_p = 0$$

$$y \cdot (x_q - x_p) + x(y_p - y_q) + x_p y_q - x_q y_p = 0$$

$$\boxed{y = \frac{-x \cdot (y_p - y_q)}{x_q - x_p} + \frac{x_q y_p - x_p y_q}{x_q - x_p}}$$

Para simplificar a notação, denotaremos $m_1 = \frac{-(y_p - y_q)}{x_q - x_p}$ como o coeficiente angular da reta PQ e $b_1 = \frac{x_q y_p - x_p y_q}{x_q - x_p}$ o coeficiente linear da reta PQ. Assim, a reta PQ tem sua equação reescrita por

$$\boxed{y = m_1 x + b_1.}$$

Vamos encontrar agora a equação da reta que passa por AA' e é perpendicular a reta PQ no ponto médio M.

A equação genérica da reta AA' é $\boxed{y = m_2 x + b_2}$.

Como as retas PQ e AA' são perpendiculares, então

$$m_1 \cdot m_2 = -1, \text{ substituindo o valor de } m_1$$

$$\frac{-(y_p - y_q)}{x_q - x_p} \cdot m_2 = -1 \qquad \cdot(-1)$$

$$\boxed{m_2 = \frac{x_q - x_p}{y_p - y_q}}$$

Como o ponto A pertence à reta AA', substituímos suas coordenadas na equação a seguir para determinar o valor de b_2, o coeficiente linear:

Setor Curricular: Matemática

Nº 19227

"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire.

Questão 5) (Continuação)

$$y = \frac{x_q - x_p}{y_p - y_q} x + b_2$$

$$y_a = \frac{(x_q - x_p)}{y_p - y_q} \cdot x_a + b_2$$

$$\boxed{b_2 = y_a - x_a \cdot \frac{(x_q - x_p)}{y_p - y_q}}$$

Assim, a reta AA' será

$$y = \frac{x_q - x_p}{y_p - y_q} \cdot x + y_a - x_a \frac{(x_q - x_p)}{y_p - y_q}$$

$$y = \left(\frac{x_q - x_p}{y_p - y_q} \right) (x - x_a) + y_a$$

$$\boxed{y = m_2 (x - x_a) + y_a}, \text{ com } m_2 = \frac{x_q - x_p}{y_p - y_q}$$

Como o ponto A' pertence à reta AA', substituiremos suas coordenados na equação da reta AA':

$$\boxed{y_a' = m_2 (x_a' - x_a) + y_a} \qquad (1)$$

Como o ponto médio M pertence à reta PQ, substituiremos suas coordenadas na equação da reta PQ

$$\frac{y_a + y'_a}{2} = + \left(\frac{x_a + x_a'}{2} \right) \cdot m_1 + b_1 \quad (\times 2)$$

$$y_a + y'_a = (x_a + x_a') m_1 + 2 b_1$$

"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano." Paulo Freire

Questão 5) (Continuação)

$$\boxed{y_a' = (x_a + x_a')\,m_1 + 2b_1 - y_a} \qquad (2)$$

Vamos igualar as equações (1) e (2) para obtermos a abscissa do ponto A':

$$m_2(x_a' - x_a) + y_a = (x_a + x_a')\,m_1 + 2b_1 - y_a$$

$$m_2 x_a' - m_2 x_a + y_a = x_a m_1 + x_a' m_1 + 2b_1 - y_a$$

$$m_2 x_a' - m_1 x_a' = m_1 x_a + m_2 x_a + 2b_1 - y_a - y_a$$

$$x_a'(m_2 - m_1) = x_a(m_1 + m_2) + 2(b_1 - y_a)$$

$$\boxed{x_a' = \frac{x_a(m_1 + m_2) + 2(b_1 - y_a)}{m_2 - m_1}} \qquad (3)$$

Substituiremos o resultado obtido na equação (3) na equação (1) para obtermos a ordenada do ponto A':

$$\boxed{y_a' = m_2 \cdot \left(\left(\frac{x_a \cdot (m_1 + m_2) + 2(b_1 - y_a)}{m_2 - m_1}\right) - x_a\right) + y_a}\ , \text{ sendo}$$

$$m_1 = \frac{-(y_p - y_q)}{x_q - x_p}\ ;\quad b_1 = \frac{x_q y_p - x_p y_q}{x_q - x_p}\ ;\quad m_2 = \frac{x_q - x_p}{y_p - y_q}$$