UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	DANÚBIA BALTAZAR DA CRUZ
Frase	"Não há saber mais ou saber menos: Há saberes diferentes." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Não há saber mais ou saber menos: Há saberes diferentes". Paulo Freire.

Nº Identificador 19236

"Não há saber mais ou saber menos: Há saberes diferentes". Paulo Freire

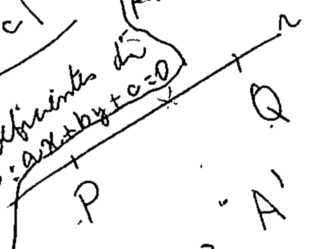
Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular / Matemática

Nº 19236

Q5. Seja r reta que contém os pontos P e Q.

d_{Ar} é a distância entre ponto e reta dada por $d_{Ar} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ onde a, b e c são coeficientes da eq. da reta r: $ax+by+c=0$



Distância de A a r

Se A e A' são simétricos, temos que $d_{Ar} = d_{A'r}$ e $\vec{v}_{AA'} \perp \vec{v}_{PQ}$

Dist de A' a r

$\vec{v}_{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P)$

vetor normal a $\vec{v}_{PQ}$: $\vec{v}_n$ e $\vec{v}_n = (-(y_Q - y_P), x_Q - x_P)$,

A escolha foi ~~feit~~ feita porque o produto escalar dos vetores assim definidos resulta em 0 ~~e como x_Q, x_P~~ e isto ocorre mesmo ~~que 1 deles não seja o vetor nulo~~ que qualquer um deles não seja o vetor nulo. A reta s será a reta que passa por A e por A'. Seu vetor diretor é o $\vec{v}_n$ deste modo, a equação paramétrica é dada por

$$s: \begin{cases} x = x_A + (-y_Q + y_P)t & (4) \\ y = y_A + (x_Q - x_P)t & (5) \end{cases}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

A equação da reta r é $r: \begin{cases} x = x_P + \alpha t_1 & (1) \\ y = y_P + \beta t_1 & (2) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $\alpha = (x_Q - x_P)$, $\beta = (y_Q - y_P)$
paramétrica

daí a equação geral de r é $\alpha y - \beta x + (-\alpha y_P + \beta x_P) = 0$

Com $x = x_P + \alpha t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{x - x_P}{\alpha}$ (3). Substituindo (3) em (2), temos

$$y = y_P + \beta\left(\frac{x - x_P}{\alpha}\right) \Rightarrow \alpha y = \alpha y_P + \beta(x - x_P) \Rightarrow \alpha y - \beta x + (-\alpha y_P + \beta x_P) = 0$$

~~Como~~ Usando o fato de $A' \in s$ e $d_{A'r} = d_{Ar}$, temos que

$$d_{Ar} = \frac{|\alpha y_A - \beta x_A + (-\alpha y_P + \beta x_P)|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{|\alpha y_{A'} - \beta x_{A'} + (-\alpha y_P + \beta x_P)|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad *$$

Considerando $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ e que $x_{A'} = x_A + (-y_Q + y_P)t$ (6) e $y_{A'} = y_A + (x_Q - x_P)t$ (7) temos:

Folha 1

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19236

$$\left|\alpha y_A - \beta x_A + (-\alpha y_P + \beta x_P)\right| = \left|\alpha\left[y_A + (x_Q - x_P)t\right] - \beta\left[x_A + (-y_Q + y_P)t\right] + (-\alpha y_P + \beta x_P)\right|$$

$\therefore$ ou $\alpha\left[\cancel{y_A} + (x_Q - x_P)t\right] - \beta\left[\cancel{x_A} + (-y_Q + y_P)t\right] + (-\alpha \cancel{y_P +} \beta x_P)$

$= \alpha \cancel{y_A} - \beta \cancel{x_A} + (-\alpha \cancel{y_P +} \beta x_P)$ e $t = 0$, que é o próprio A ou

$$\alpha\left[y_A + (x_Q - x_P)t\right] - \beta\left[x_A + (-y_Q + y_P)t\right] + (-\alpha y_P + \beta x_P) = -\alpha y_A + \beta x_A - (-\alpha y_P + \beta x_P)$$

$$\left[\alpha(\overset{=\alpha}{x_Q - x_P}) - \beta(-y_Q + \overset{=-\beta}{y_P})\right]t = (-\alpha y_A + \beta x_A + \alpha y_P - \beta x_P) \cdot 2$$

$$t = \frac{(-\alpha y_A + \beta x_A + \alpha y_P - \beta x_P) \cdot 2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Retomando às equações 6 e 7,

$$x_{A'} = x_A - \beta t \Rightarrow x'_A = x_A - \frac{2\beta(-\alpha y_A + \beta x_A + \alpha y_P - \beta x_P)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$= x_A - \frac{2\overset{\beta}{(y_Q - y_P)}\left(-[x_Q - x_P]y_A + [y_Q - y_P]x_A + [x_Q - x_P]y_P - [y_Q - y_P]x_P\right)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$= \boxed{x_A - \frac{2\left[x_Q y_P y_Q - x_Q y_P^2 - y_Q^2 x_P + y_P y_Q x_P\right]}{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = x_{A'}} \text{ e}$$

$$y'_A = y_A + (x_Q - x_P)t = y_A + \frac{2(x_Q - x_P)(-\alpha y_A + \beta x_A + \alpha y_P - \beta x_P)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$= y_A + \frac{2(x_Q - x_P)\left[-(x_Q - x_P)y_A + (y_Q - y_P)x_A + (x_Q - x_P)y_P - (y_Q - y_P)x_P\right]}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$y_{A'} = y_A + \frac{2\left[-x_Q^2 y_A - x_P^2 y_A + y_Q x_A x_Q - y_Q x_A x_P - y_P x_A x_Q + y_P x_A x_P - y_P x_A x_Q + y_Q x_P^2 - y_Q x_P x_Q + y_P x_A x_P + x_Q^2 y_P - x_Q x_P y_P\right.}{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

Folha 2

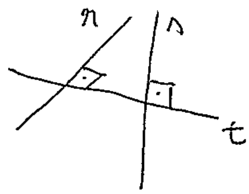
1) a) Falsa pois r e s podem ser retas reversas.

b) Falsa novamente porque podem ser reversas.

c) Falsa pois s e t definem um plano, e r e s também pois se intersectam e os dois planos podem ser distintos no caso de r e t serem reversas.

d) Verdadeira.

e) Falsa, pois r e s podem ser retas reversas.



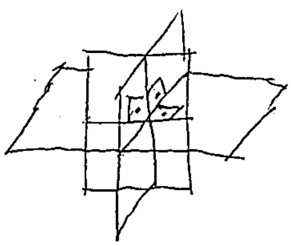
f) ~~Verdadeira~~ Verdadeira.

g) Verdadeira.

h) Verdadeira

i) Verdadeira

j) Falsa. Basta imaginar os planos que são perpendiculares dois a dois exemplo chão, parede lateral e parede frontal de uma sala.



~~3) Analisar as funções que formam~~

Q 1. Para um conjunto finito, a cardinalidade é a quantidade de elementos que possui. ↳ B é subconjunto de um conjunto finito.

O conjunto B é o conjunto dos ímpares a partir do 1 até o 2999. Do 1 ao 10 são 5 ímpares, do 10 ao 20 também e isso continua até o 3000. Melhor dizendo; entre múltiplos de 10 há 5 ímpares. Até o 3000 são 300 múltiplos de 10. Daí $300 \times 5 = 1500$, ou seja

$\# B = 1500$.

Q 2.

b) $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1}$

$\binom{n-3}{k-3} = \binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3}$; $2\binom{n-3}{k-2} = 2\binom{n-4}{k-3} + 2\binom{n-4}{k-2}$; $\binom{n-3}{k-1} = \binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1}$ $\therefore$ $\binom{n-1}{k-1} =$

$= \binom{n-4}{k-4} + 3\binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1}$ (1)

$\binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} =$

$= \binom{n-4}{k-3} + \binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$

$= \binom{n-4}{k-3} + 3\binom{n-4}{k-2} + 3\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$ (2), logo

$\binom{n}{k} = \underset{(1)}{\binom{n-1}{k-1}} + \underset{(2)}{\binom{n-1}{k}} \Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$.

Q2-

a) Na turma de ~~Inglês~~ Italiano da professora A haverá um trabalho de campo. A turma tem 12 alunos e 8 serão escolhidos para ir ao consulado enquanto o restante irá até a colônia de imigrantes: De quantos modos ~~possíveis~~ podem ser montados os grupos que irão ao consulado?

1ª solução: usando a ~~igualdade~~ expressão $\binom{n}{k}$:

A ordem de escolha entre os membros não afetará ~~as cond~~ a formação do grupo. Portanto ~~pois escolhendo alu~~ ~~ou grupo~~,

$$\underbrace{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}_{\text{escolhas}} = \frac{12!}{8!\,4!} = \boxed{\binom{12}{8}}$$

$\div\, 8!$ pois a ordem não importa

2ª solução: a professora pode primeiro tirar 1 aluno da turma (pode ser porque tenha esquecido dele) forma os grupos de 8 com os 11. Neste caso ficam faltando os grupos em que o faltoso estaria. Ela faz grupos de 7 com os 11 e garante o 8º lugar para o que esqueceu. Deste modo:

$$\boxed{\binom{11}{8} + \binom{11}{7}.}$$

c) Como verificado em b, a igualdade $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ① ② implica na igualdade $\binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$

ou seja $\binom{12}{8} = \binom{8}{4} + 4\binom{8}{5} + 6\binom{8}{6} + 4\binom{8}{7} + \binom{8}{8}$.

Q3. ~~A função g(x)=sen(x) e a função x~~

A função $f(x) = sen(x)$ e a função $g(x) = x$ são funções contínuas e ambas possuem limite quando x se aproxima de 0 e $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$. Como o limite de ambas ~~0~~ em $x = 0$ é 0, o limite do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ em $x = 0$ representa uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Pela existência do limite e ~~da~~ pela continuidade de f e g podemos aplicar a regra de L'Hospital que diz que ~~neste caso~~ dadas estas condições $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ou seja,

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$