UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	PEDRO AUGUSTO ROCHA DA SILVA GUERRA
Frase	"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor". Paulo Freire

Nº Identificador 19272

Frase

"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor".
Paulo Freire

Questão 1

Note que, obviamente, todo nº ímpar vai satisfazer à relação.
Mas podemos ter algum nº par no conjunto?

Considere um exemplo mais simples: $A' = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 30\}$

1, ~~2~~, 3, 4 (2^2), 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11, 12 (3.2^2), 13, ~~14~~, 15, 16 (2^4), 17, ~~18~~, 19, 20 ($2^2.5$), 21, ~~22~~, 23, ~~24~~, 25, ~~26~~, 27, 28 (7.2^2), 29, ~~30~~

Repare que além dos ímpares podemos considerar alguns casos de nºs pares, na verdade, vamos considerar todos os casos onde na decomposição do número em fatores primos, não apareça um expoente ímpar no fator 2.

São eles

1º) 2^0 . (nºs ímpares)
2º) 2^2 . (nºs ímpares)
3º) 2^4 . (nºs ímpares)
4º) 2^6 . (nºs ímpares)
5º) 2^8 . (nºs ímpares)
6º) 2^{10} . (nºs ímpares)

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$
$2^{11} = 2048$
$2^{12} = 4096$

1º) 1.500 números ímpares

2º) São todos os números múltiplos de 4 por fatores ímpares
4, 12, 20, 28, 36, 44, ..., 2996
São 375 números nessa situação

3º) São todos os números múltiplos de 16 por fatores ímpares
16, 48, 80, ..., 2984.
São 100 números nessa situação

4º) São todos os números múltiplos de 64 por fatores ímpares
64, 192, 320, ...,
São 24 números nessa situação

5º) São todos os números múltiplos de 256 por fatores ímpares
256, 768, 1280, 1792, 2304, 2816
São 6 números nessa situação

6º) Apenas o 1024

Portanto, a cardinalidade máxima de B é:

1500 + 375 + 100 + 24 + 6 + 1

#B pode ser até 2006.

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19272

Questão 2:

Considere o seguinte problema:

a) Determine (~~a combinação~~) de quantas formas podemos escolher K itens e um grupo de n itens.

Devemos mostrar que: $\binom{n}{K} = \binom{n-1}{K-1} + \binom{n-1}{K}$

ou seja: $$\frac{(n-1)!}{(K-1)!\,[(n-1) - (K-1)]!} + \frac{(n-1)!}{K!\,[(n-1)-K]!} = \frac{n!}{K!\,(n-K)!}$$

Note que:
$$\frac{(n-1)!}{(K-1)!\,[(n-1)-(K-1)]!} + \frac{(n-1)!}{K!\,[(n-1)-K]!} = \frac{(n-1)!}{(K-1)!\,(n-K)!} + \frac{(n-1)!}{K!\,(n-K-1)!}$$

Mas note que:
$$\frac{(n-1)!}{(K-1)!\,(n-K)!} + \frac{(n-1)!}{K!\,(n-K-1)!} = \frac{(n-1)!}{(K-1)!\,(n-K)\cdot(n-K-1)!} + \frac{(n-1)!}{K\cdot(K-1)!\,(n-K-1)!}$$

Logo:
$$\frac{(n-1)!}{(K-1)!\,(n-K)\cdot(n-K-1)!} + \frac{(n-1)!}{K\,(K-1)!\,(n-K-1)!} = \frac{(n-1)!}{(K-1)!\,(n-K-1)!}\left(\frac{1}{n-K} + \frac{1}{K}\right) \quad (1)$$

Isso nos dá que:
$$(1) = \frac{(n-1)!}{(K-1)!\,(n-K-1)!}\cdot\left(\frac{K+(n-K)}{K(n-K)}\right) = \frac{(n-1)!}{(K-1)!\,(n-K-1)!}\cdot\frac{n}{K(n-K)} = \frac{n!}{K!\,(n-K)!}$$

Como queríamos mostrar!

b) Podemos escrever (pelo item a)
$$\binom{n}{K} = \binom{n-1}{K-1} + \binom{n-1}{K} \quad (1)$$

Mas repare que:
$$\binom{n-1}{K-1} = \binom{n-2}{K-2} + \binom{n-2}{K-1} \quad (2) \qquad e \qquad \binom{n-1}{K} = \binom{n-2}{K-1} + \binom{n-2}{K} \quad (3)$$

Folha 2 (dois)

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19272

Questão 2

Continuação do item b

Substituindo (2) e (3) em (1)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} \quad (4)$$

Mais uma vez:

$$\binom{n-2}{k-2} = \binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2} (5); \quad \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1} (6); \quad \binom{n-2}{k} = \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} (7)$$

Substituindo (5), (6) e (7) em (4):

$$\binom{n}{k} = \binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-3}{k-2} + 3\binom{n-3}{k-1} + 1\binom{n-3}{k} \quad (8)$$

Repare que:

$$\binom{n-3}{k-3} = \binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3} (9); \quad \binom{n-3}{k-2} = \binom{n-4}{k-3} + \binom{n-4}{k-2} (10);$$

$$\binom{n-3}{k-1} = \binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1} (11); \quad \binom{n-3}{k} = \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} (12)$$

Substituindo (9); (10); (11) e (12) em (8):

$$\binom{n}{k} = \binom{n-4}{n-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$$

Como queríamos mostrar

item c)

$$\underbrace{\frac{(n-4)!}{(k-4)!\,(n-k)!} + 4\left[\frac{(n-4)!}{(k-3)!\,(n-k-1)!}\right] + 6\left[\frac{(n-4)!}{(k-2)!\,(n-k-2)!}\right] + 4\left[\frac{(n-4)!}{(k-1)!\,(n-k-3)!}\right] + \frac{(n-4)!}{k!\,(n-k-4)!}}_{(1)} = \frac{n!}{k!\,(n-k}$$

Temos que:

$$(1) = \frac{(n-4)!}{(k-4)!\,(n-k-4)!}\left[\frac{1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot(n-k-2)\cdot(n-k-3)} + \frac{4}{(k-3)\cdot(n-k-1)(n-k-2)(n-k-3)} + \frac{6}{(k-3)(k-2)\,(n-k-2)\cdot(n-k-3)} + \frac{4}{(k-1)(k-2)(k-3)\,(n-k-3)} + \frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)(k)}\right]$$

Folha 3 (três)

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19272

Questão 2

continuação item c

$$(1) = \frac{(n-4)!}{(K-4)!\,(n-K-4)!} \cdot \left[\frac{[(K)\cdot(K-1)(K-2)(K-3)] + 4[(K-2)(K-1)(K)(n-K)] + 6[(K-1)(K)(n-K-1)(n-K)] + 4[(K)(n-K-2)(n-K-1)(n}{(K-3)(K-2)(K-1)(K)\,(n-K)(n-K-1)(n-K-2)(n-K-3)} + \frac{[(n-K-3)(n-K-2)(n-K-1)\,(n-K)}{(K-3)(K-2)\,(K-1)(K)(n-K)(n-K-1)(n-K-2)\,(n-K-3)} \right]$$

$$(1) = \frac{(n-4)!}{(K-4)!\,(n-K-4)!} = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)\,n}{(K-3)(K-2)(K-1)(K)\,(n-K)(n-K-1)(n-K-2)(n-K-3)} = \frac{n!}{K!\,(n-K)!}$$

como queríamos mostrar

Questão 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

Repare que possuímos uma indeterminação do tipo 0/0

Usando L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d(\operatorname{sen}(x))}{dx}}{\frac{d(x)}{dx}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19272

Questão 4

anulada!

item a)

Falso, podem ser reversas na mesma situação (quando não existir um plano que as contém)

item b)

Falso, mais uma vez elas podem ser reversas.

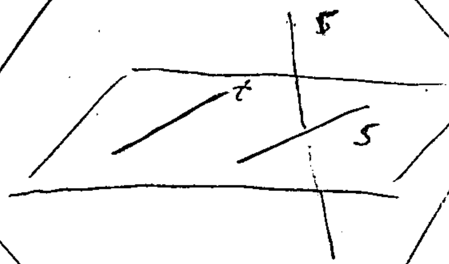
anulada!

item c)

Falso.

Considere a seguinte situação: s e t ∈ α

De fato, se s e t forem coplanares e r não pertencer a esse plano, r e t seriam retas reversas.



item d)

(~~[illegible]~~)

Falso, podemos ter r e s sendo coincidentes.

item e)

Falso, podem ser coincidentes.

item f)

Verdadeiro (considerando que o caso de coincidência como sendo um corte ao longo de todo o plano, por todos os seus pontos)

item g)

Verdadeiro

item h) Falso

Podem ser coincidentes.

item i)

(~~[illegible]~~) Verdadeiro (considerando o caso de serem coincidentes como uma interseção em todos os pontos)

item j)

Sem efeito!

Folha 5 (cinco)

Anulada!

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular Matemática	Nº 19272

Questão 4

item a)

Falso, podem ser reversas na mesma situação (quando não existir um plano que as contém)

item b)

Falso, mais uma vez elas podem ser reversas

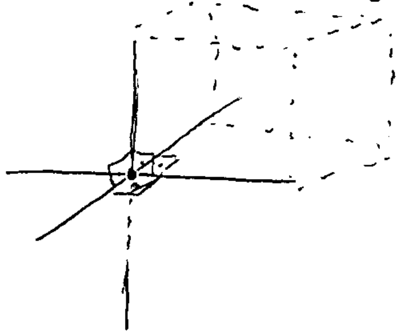
item c) Falso

Se s e t forem coplanares, e r não pertencer a esse plano, r e t seriam retas reversas.

item d) Verdadeiro

item e) Falso

Considere, como exemplo, o vértice de um cubo e as arestas dele como sendo as retas.



item f)

Verdadeiro

item g)

Verdadeiro

item h)

Verdadeiro

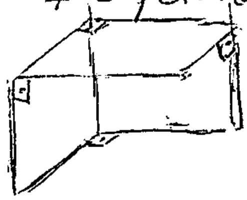
item i)

Verdadeiro

item j)

Falso

Considere as paredes que formam ~~o~~ canto superior de uma sala (nesse caso, a interseção dos 3 planos é um único ponto)



Folha 6 (seis)

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ
Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.

Setor Curricular: Matemática

Nº 19272

Questão 5)

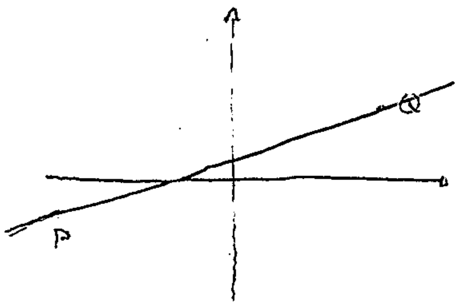
Sabemos que a reta que passa por P e Q deverá ter equação do tipo:

$$a x_p + b = y_P$$
$$a x_q + b = y_q$$

(~~Seja r a reta perpendicular a PQ e passando por Q~~)

Desta forma:

O ponto $A_c = (x_A, y_A)$ ~~com~~ coordenadas cartesianas terá coordenadas



$$A_{PQ} = \begin{bmatrix} x_p & y_P \\ x_q & y_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p x_A + y_P y_A \\ x_q x_A + y_q y_A \end{bmatrix}$$

O simétrico terá:

Folha 7 (sete)