UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
COLÉGIO DE APLICAÇÃO

Concurso Público para provimento de vagas em cargos efetivos da Carreira de Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

Edital Nº 1065, de 26 de dezembro de 2018

PROVA DE CONTEÚDO ESPECÍFICO

Setor	MATEMÁTICA
Candidato	CLARIANNE LUCIOLA DE ABREU VIEIRA MACHADO LUCAS
Frase	"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor." Paulo Freire
Reescreva a frase	"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor." Paulo Freire

Nº Identificador 19278

"Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor".

1ª Questão) Seja $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 3.000\} = \{1, 2, 3, \ldots, 3000\}$.
Como $B \subset A$ é tal que $x \in B \Rightarrow 2x \notin B$, então o conjunto B é, no máximo, composto por todos os números ímpares compreendidos entre 1 (inclusive) e 3.000, ou seja, o valor máximo que a cardinalidade de B pode assumir é igual a $\frac{3.000}{2} = 1.500$.

2ª Questão) a) Provemos que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

De fato, $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} =$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k).(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k-1)!} = \frac{k.(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k(k-1)!.(n-k)\,(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,n}{k!.(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Consideremos, agora, o seguinte problema de contagem:

Em uma sala de aula, é aplicada uma prova com 10 questões para cada aluno. Apenas 7 questões devem ser resolvidas em qualquer ordem. Determine de quantas formas a prova pode ser feita.

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular MATEMÁTICA	Nº 19278

2ª Questão a) (continuação)

Resolvendo o problema utilizando o membro $\binom{n}{k}$, temos:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10.\cancel{9}^{3}.\cancel{8}^{4}.\cancel{7!}}{\cancel{7!}\,\cancel{3}.\cancel{2}.1} = 120.$$

Por outro lado, utilizando o membro $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, obtemos:

$$\binom{9}{6} + \binom{9}{7} = \frac{9!}{6!\,3!} + \frac{9!}{7!\,2!} = \frac{\cancel{9}^{3}.\cancel{8}^{4}.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}.\cancel{3}.\cancel{2}.1} + \frac{9.\cancel{8}^{4}.\cancel{7!}}{\cancel{7!}.\cancel{2}.1} = 84+36 = 120.$$

b) Provemos que $\binom{n}{k} = \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$

Do item (a), temos que:

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Aplicando esta igualdade em cada parcela do segundo membro, obtemos

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$= \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k}$$

$$= \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1}$$

2ª Questão) b) (continuação)

$$\overset{(a)}{=} \binom{n-3}{k-3} + \binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} + 2\left[\binom{n-3}{k-2} + \binom{n-3}{k-1}\right]$$

$$\overset{(a)}{=} \binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-3}{k-2} + 3\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k}$$

$$\overset{(a)}{=} \binom{n-4}{k-4} + \binom{n-4}{k-3} + 3\left[\binom{n-4}{k-3} + \binom{n-4}{k-2}\right] + 3\left[\binom{n-4}{k-2} + \binom{n-4}{k-1}\right] +$$

$$+ \binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}$$

$$\overset{(a)}{=} \binom{n-4}{k-4} + 4\binom{n-4}{k-3} + 6\binom{n-4}{k-2} + 4\binom{n-4}{k-1} + \binom{n-4}{k}.$$

c) Resolvendo o problema criado no item (a), utilizando o segundo membro da identidade do item (b), obtemos:

$$\binom{10}{7} = \binom{6}{3} + 4.\binom{6}{4} + 6\binom{6}{5} + 4\binom{6}{6} + \cancel{\binom{6}{7}}$$

(n deve ser maior ou igual a k)

$$= \frac{6!}{3!.3!} + 4.\frac{6!}{4!.2!} + 6.\frac{6!}{1!5!} + 4.\frac{6!}{0!.6!}$$

$$= \frac{\cancel{6}.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.\cancel{3}.\cancel{2}.1} + \overset{2}{\cancel{4}}.\frac{6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}\cancel{2}.1} + 6.\frac{6.\cancel{5!}}{1.\cancel{5!}} + 4.\frac{\cancel{6!}}{1.\cancel{6!}}$$

$$= 20 + 60 + 36 + 4$$

$$= 120$$

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular MATEMÁTICA	Nº 19278.

3ª Questão) Como $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x}$ é uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, usando L'Hospital, obtemos:

$\frac{(\text{sen}\,x)'}{x'} = \frac{\cos x}{1} = \cos x$. Logo, $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

5ª Questão) Obtendo a equação da reta que passa pelos pontos P e Q:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} y_P & 1 \\ y_Q & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_P & 1 \\ x_Q & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_P & y_P \\ x_Q & y_Q \end{vmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x(y_P - y_Q) - y(x_P - x_Q) + (x_P y_Q - x_Q y_P) = 0}$$

Como A e A' são simétricos em relação à reta PQ, então a distância entre cada um destes pontos e a reta PQ é a mesma. Logo, $d(A, \overleftrightarrow{PQ}) = d(A', PQ)$, ou seja, se $A' = (x_{A'}, y_{A'})$ então

$$\frac{(y_P - y_Q)x_A + (x_Q - x_P)y_A + (x_P y_Q - x_Q y_P)}{\sqrt{(y_P - y_Q)^2 + (x_Q - x_P)^2}} =$$

Folha 4

5ª Questão) (continuação)

$$= \frac{(y_P - y_Q)x_{A'} + (x_Q - x_P)y_{A'} + (x_P y_Q - x_Q y_P)}{\sqrt{(y_P - y_Q)^2 + (x_Q - x_P)^2}}.$$

$$\Rightarrow (y_P - y_Q)x_A + (x_Q - x_P)y_A = (y_P - y_Q)x_{A'} + (x_Q - x_P)y_{A'}$$

$$\Rightarrow \boxed{(y_P - y_Q)(x_A - x_{A'}) = (x_Q - x_P)(y_{A'} - y_A)}$$

Por outro lado, o ponto médio de $\overline{AA'} = \left(\frac{x_A + x_{A'}}{2}, \frac{y_A + y_{A'}}{2}\right) \in PQ$.

Então, utilizando a equação da reta PQ, temos

$$\left(\frac{x_A + x_{A'}}{2}\right)(y_P - y_Q) + \left(\frac{y_A + y_{A'}}{2}\right)(x_Q - x_P) + (x_P y_Q - x_Q y_P) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{A'} = \left[\left(\frac{x_A + x_{A'}}{2}\right)(y_Q - y_P) + (x_Q y_P - x_P y_Q) + \frac{y_A(x_P - x_Q)}{2}\right] \cdot \frac{2}{(x_Q - x_P)}}$$

4ª Questão) a) Falso, pois r e s podem pertencer a planos distintos e paralelos.

b) Falso, pois r e s podem pertencer a planos distintos e paralelos.

c) Verdadeira.

d) Verdadeira.

e) Falsa, pois r e s podem pertencer a planos diferentes e, neste caso, não serão paralelos.

Concurso Público EBTT CAp-UFRJ Edital nº 1065, de 26 de dezembro de 2018.	Setor Curricular MATEMÁTICA	Nº 19278

4ª Questão (continuação)

f) verdadeiro.

g) verdadeiro.

h) verdadeiro.

i) verdadeiro.

j) verdadeiro.